H. Herre

Vorlesungsskripten Logik

Universität Leipzig, Institut für Informatik

Leipzig, 1999

Satz: Sergej Melnik, Institut für Informatik, Leipzig

Warnung: diese Skripten befinden sich in der Bearbeitungsphase und sind zur Zeit ausschließlich für institutsinternen Gebrauch bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

1 Begriff der formalen Logik

Die Entwicklung der Informatik ist seit Beginn der 80er Jahre durch eine zunehmende Verwendung von Methoden der Künstlichen Intelligenz beim Aufbau von Informationssystemen gekennzeichnet. Künftige Computer (als Hardware-Software-Systeme) werden konzipiert als intelligente, wissensverarbeitende Systeme, die die Fähigkeit besitzen, mit dem Menschen in natürlicher Sprache zu kommunizieren sowie Schlußfolgerungen zu ziehen und Probleme zu lösen. Das theoretische Fundament für die Wissensverarbeitung ist die mathematische und philosophische Logik. Die formale Logik spielte bereits eine große Rolle als Lehre von den Formen des korrekten Schließens, als nächstes war sie als metamathematische Disziplin von grundlegender Bedeutung. Ihre dritte große Rolle spielt sie bei der Entwicklung und Grundlegung der Informatik. So wurden wichtige Begriffe und Methoden entwickelt, die wesentlich zur Konstituierung der Informatik als Wissenschaft beitrugen. Hierzu gehören die Präzisierung des Algorithmenbegriffs, die Formalisierung des mathematischen Schließens sowie der Aufbau einer formalen Semantik für verschiedene Logiksprachen. Von großer Bedeutung war die Entwicklung eines einheitlichen Begriffsapparats für die Analyse des menschlichen Wissens sowie die Vervollkommnung und Verschärfung der axiomatisch-deduktiven Methode. Mit der Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Computer wachsen heute die Möglichkeiten, die Erkenntnisse und Methoden der mathematschen Logik auch praktisch umzusetzen. Jeder Formalismus zur Repräsentation von Wissen muß eine Semantik aufweisen, die eine Beziehung zwischen den formalen Ausdrücken und dem zu beschreibenden Gegenstandsbereich herstellt. Nur bei dem Vorliegen einer präzisen Semantik ist es sinnvoll, danach zu fragen, ob ein formaler Ausdruck eine wahre Aussage über den betreffenden Bereich der Wirklichkeit darstellt. Wenn Wissen repräsentiert werden soll, so muß mit dem Repräsentationsformalismus zugleich eine Denotations- und Wahrheitstheorie entwickelt werden. Die Prädikatenlogik ist ein wichtiges Pradigma für die Untersuchung derartiger Fragen. Sie ist ein ausdrucksfähiger Formalismus für die Darstellung von Wissen aus verschiedenen Anwendungsbereichen und stellt ferner einen Deduktionsapparat zur Verfügung, der Schlüsse über die formalen Repräsentationen zuläßt und damit automatische Problemlösusngen ermöglicht. Das wichtigste Anwendungsgebiet der mathematischen Logik ist daher die Wissensverarbeitung.

1.1 Historischer Überblick

Die mathematische Logik, auch symbolische Logik genannt, ist die moderne Gestalt der formalen Logik. Deren Wurzeln reichen bis in die Antike zurück, als ihr Begründer gilt Aristoteles. Die formale Logik befaßt sich traditionell mit der Analyse und der Beschreibung von Formen des schlußfolgernden Denkens. Im Mittelpunkt stehen hierbei die Bildung von Begriffen, von Urteilen und Sätzen sowie das Vollziehen von Schlüssen. Die formale Logik gibt Gesetze und Prinzipien für die Gültigkeit von Schlüssen sowie für den korrekten Aufbau von Begriffssystemen und Theorien an. Formal wird die Logik genannt, weil sie von denjenigen Eigenschaften abstrahiert, die sich auf den Inhalt oder den Sinn der Aussagen bezieht. *Aristoteles* hat in seinen Schriften, die man später unter dem Namen *Organon* zusammenfaßte, grundlegende Aspekte des schlußfolgernden Denkens untersucht und erstmalig Gesetze formuliert, die die logische Wahrheit von Aussagen begründen. Besondere Bedeutung kommt seiner Schrift *Analytica Priora* zu, in der bereits die Grundelemente des Klassenkalküls entwickelt wurden.

Die mathematische Logik ist dadurch gekennzeichnet, daß die Methoden der Mathematik auf das Gebiet der formalen Logik angewendet werden. G. W. LEIBNIZ (1646–1716) gilt als erster mathematischer Logiker. Er führte zwei Neuerungen ein: zum ersten den Gebrauch einer an der Mathematik orientierten künstlichen Sprache und zum zweiten einen konstruktiven Aufbau der Logik. Sein *Ziel* war die Entwicklung eines Universalkalküls als Grundlage aller Wissenschaften. Dazu stellte er drei Forderungen an die von ihm angestrebte Formalisierung des Denkens:

1. Aufbau eines allgemeinen Zeichensystems zur Darstellung von Begriffen ("Universalsprache").
2. Bildung eines Kalküls für die rechnerische Behandlung der Ausdrücke des Zeichensystems.
3. Entwicklung eines Entscheidungsverfahrens für den Test der Wahrheit eines Ausdrucks.

Von großer Bedeutung für die weitere Entwicklung der mathematischen Logik wurde das Werk *The Mathematical Analysis of Logik* von *G. Boole* (1815-1864). Boole stellte sich die Aufgabe, eine neue Logik auf algebraischer Grundlage aufzubauen. Die von ihm ausgearbeitete Gestalt einer Algebra der Logik wurde dann von anderen Logikern seiner Zeit systematisch ausgearbeitet und erweitert.

Einen wichtigen Schritt in Richtung des LEIBNIZschen Programms stellen die Arbeiten von G. FREGE dar, insbesondere seine "Begriffsschrift". Hier erschienen die entscheidenden Begriffe der mathematischen Logik das erste mal. Frege setzte sich das Ziel, einen Universalkalkül für die Mathematik zu entwickeln. Er sagt hierzu:

In einer kleinen Schrift habe ich nun eine Wiederannäherung an den Leibnizschen Gedanken einer lingua characteristica versucht ... Ich hatte von vornherein den Ausdruck eines Inhalts im Auge. Der Zielpunkt meiner Bestrebungen ist eine lingua characteristica zunächst für die Mathematik, nicht eines auf die reine Logik beschränkten calculus. Der Inhalt soll aber genauer als durch die Wortsprache wiedergegeben werden.

In der *Begriffsschrift* wurde erstmalig die Syntax einer künstlichen Sprache in präziser Weise dargestellt. Folglich ist der in dieser Schrift entwickelte Formalismus nicht nur ein direkter Vorgänger der gegenwärtigen Systeme der mathematischen Logik, sondern aller formaler Sprachen, einschließlich der Programmiersprachen.

Frege wollte in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* zeigen, *... daß allein mit logischen Mitteln die einfachsten Gesetze der Arithmetik abgeleitet werden können ....* Dieses Vorhaben gelang zunächst jedoch nicht, da B. Russell in dem *Fregeschen* System eine Antinomie entdeckte. Diese Antinomie läßt sich, im Kontext der Mengentheorie, folgendermaßen herleiten.

1. *Extensionalität*: zwei Mengen werden als gleich angesehen, wenn sie die gleichen Elemente haben

$$\forall x \forall y \big(x = y \longleftrightarrow \exists u (u \in x \longleftrightarrow u \in y)\big)$$

2. Sei $F(v)$ eine Eigenschaft. Dann existiert eine Menge, die genau die Elemente v umfaßt, für die die Eigenschaft $F(v)$ zutrifft.

$$\exists u \forall v \big(v \in u \longleftrightarrow F(v)\big); \quad u = \{v \mid F(v)\}$$

Sei $F(x) = \neg x \in x$ die gegebene Eigenschaft

$$\exists u \forall v (v \in u \longleftrightarrow \neg v \in v)$$

Die Existenz ist gesichert. Wir wollen die Frage untersuchen, ob $u \in u$ gilt. Aus $u \in u \to \neg u \in u$ und $\neg u \in u \to u \in u$ folgt $u \in u \longleftrightarrow \neg u \in u$, Widerspruch.

Von besonderer Bedeutung für die Entwicklung der mathematischen Logik war das Programm von D. Hilbert.

Hierzu formulierte Hilbert die folgende Auffassung von der Mathematik:

„ Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik … zu einem Bestande von Formeln wird. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß … Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine neue Mathematik … , eine Metamathematik , die zur Sicherung jener notwendig ist, in der das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome … Auf diese Weise vollzieht sich die Entwicklung der mathematischen Gesamtwissenschaften in beständigem Wechsel auf zweierlei Art: durch Gewinnung neuer beweisbarer Formeln aus den Axiomen mittels formalen Schließens und andrerseits durch Hinzufügung neuer Axiome nebst dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit mittels inhaltlichen Schließens" .

Ziele des Hilbertschen Programms:

1. Die Formalisierung der Mathematik wie bei Frege.
2. Nachweis der Widerspruchsfreiheit des aufgestellten formalen Systems.
3. Entwicklung einer Metamathematik und Beweistheorie.

Grundlegend für die Entwicklung der logischen Semantik wurden die Untersuchungen zur präzisen Fassung des Wahrheitsbegriffs in formalisierten Sprachen durch *A. Tarski*. Von ebensolcher Bedeutung für die Grundlegung der Semantik war der Aufbau einer Theorie des Folgerns, die das inhaltiche Schließen mathematisch fundierte. Die formalistische Grundlegung der Mathematik, die Entwicklung der Metamathematik und Beweistheorie sowie die Untersuchungen zur Semantik formaler Sprachen führten zu einer Reihe neuartiger Fragestellungen, die die formale Logik nachhaltig beeinflußten. Es wurden Methoden entwickelt, die für die Informatik unmittelbar von Bedeutung sind. Diese Zusammenhänge seien in dem folgenden Diagramm skizziert.

Logik

Mathematik

- Grundlagen
- Mengentheorie
- Beweistheorie
- Modelltheorie
- Rekursionstheorie

Informatik

- formale Sprachen
- Algorithmus (CHURCH, TURING)
- Deduktionssysteme
- Automatisches Theorembeweisen
- Künstliche Intelligenz

1.2 Die axiomatisch-deduktive Methode

Die axiomatisch-deduktive Methode umfaßt ein System von Prinzipien für den Aufbau von logischen Kalkülen mit dem Ziel der Grundlegung, Systematisierung und Formalisierung eines Wissensgebiets. Diese Methode ist durch folgende Schritte charakterisiert. Zunächst werden die Begriffe einese Wissensgebiets analysiert und auf eine Menge von Grundbegriffen reduziert, aus denen sie wieder mittels Definitionen festglegt werden können. Dann werden die Aussagen eines Wissensgebiets systematisch angeordnet in dem Sinne, daß sie aus einem System von Grundaussagen, die das Wissen dieses Bereichs begründen, gefolgert werden können. Die Menge der ausgewählten Grundaussagen bezeichnet man auch als Axiomensystem. Ein solches Axiomensystem enthält Aussagen, in denen nur die Grundbegriffe auftreten. Die Grundbegriffe werden auf diese Weise axiomatisch charakterisiert. Alle Grundbegriffe werden durch geeignete Zeichen und alle abgeleiteten Begriffe und Aussagen durch Zeichenkombinationen dieser Zeichen - oft Zeichenfiguren genannt - symbolisiert. Schließlich werden Regeln für die Manipulation von Zeichenfiguren aufgestellt, die dazu dienen, weiteres Wissen formal abzuleiten.

Zur Präzisierung der axiomatisch-deduktiven Methode wollen wir einige Begriffe einführen. Im Mittelpunkt steht der Begriff des Kalküls.

1.3 Syntax und Semantik

Die *Syntax* beschäftigt sich mit dem rein formalen Teil eines logischen Kalküls, die *Semantik* präzisiert und untersucht dagegen die Interpretationen der formalen Ausdrücke einer Sprache.

Ein *formaler Kalkül* FK ist ein geordnetes Paar $FK = (FS, \vdash)$, wobei FS eine formale Sprache, und $\vdash$ eine Symbolmanipulierungsrelation ist. Die Ableitungsrelation $\vdash$ definiert eine Beziehung zwischen Mengen von Ausdrücken und Ausdrücken. $X \vdash A$ bedeutet, daß der Ausdruck A aus der Menge X von Ausdrücken ableitbar ist.

Ein *logischer Kalkül* wird als ein Quintupel $LK = (FS, \vdash, L, \models, M)$ definiert. LK wird festgelegt durch

- einen formalen Kalkül $(FS, \vdash)$,
- einen Interpretationsbereich M (eine Menge oder Klasse von Entitäten, die nicht weiter spezifiziert sind und in konkretem Kontext definiert werden);
- eine Menge L von sprachlichen Ausdrücke und
- eine Semantikrelation $\models \subseteq M \times L$, wobei wir für $(m, \varphi) \in \models$ auch $(m \models \varphi)$ schreiben. Das wichtigste Beispiel einer Semantikrelation ist die Wahrheitsrelation, d.h. $m \models \varphi$ bedeutet *"die Aussage φ ist wahr in m"*.

1.4 Logik und Künstliche Intelligenz

Die Wissensverarbeitung bildet heute eines der zentralen Themen der Forschungen auf dem Gebiet der künstlichen Intelligenz. Die gegenwärtige Entwicklung beruht auf einem Paradigmenwechsel, der in der zweiten Hälfte der sechziger Jahre stattfand und von der Erfahrung geprägt ist, daß intelligentes Verhalten wesentlich auf der Repräsentation und Nutzung von Wissen beruht.

Die logikbasierte Wissensverarbeitung beruht vom Standpunkt der der Künstlichen Intelligenz auf folgenden Voraussetzungen, *Nilsson*[Ni91]:

- Intelligente Systeme besitzen ein Symbolsystem und verfügen über ein symbolisches Modell der Umwelt, in der sie wirken; die Fähigkeiten der Intelligenz beruhen auf den Mechanismen des Symbolsystems.
- Intelligente Systeme besitzen ein Symbolsystem mit der Fähigkkeit, Wissen deklarativ zu repräsentieren und deduktionsbasierte Berechnungen auszuführen. Die Repräsentationssprache hat mindestens die Ausdrucksstärke des Prädikatenkalküls.
- Das Symbolsystem eines intelligenten Systems kann von dessen Perzeption und Bewegungssteuerung separiert und unabhängig untersucht werden.

Wissensebene	**Symbolsystem**	**Hardwaresystem**
Semantik	natürliche Sprache ... Sprachen der Wissensrepräsentation Logische Sprachen Imperative Sprachen Maschinen-Sprachen	PMS-Ebene Logische Schaltsysteme Netzwerk-Ebene Layout-Ebene

Tabelle 1:

Das einem intelligenten System zugrundeliegende Symbolsystem mit der dazugehörigen Semantik heiße im folgenden *Wissenssystem*. Die physikalische Realisierung der algorithmischen Verarbeitungsprozesse eines Wissenssystems erfolgt durch die Hardware des Computers. Nach den Annahmen der logik-basierten Wissensverarbeitung lassen sich diese Verarbeitungsprozesse vollständig auf der Symbolebene beschreiben. Die Möglichkeit der Abtrennung der Symbolebene von der Hardware folgt aus der *Symbolhypothese von Newell/Simon*[NS76]. Deren Grundgedanken lassen sich so zusammenfassen:

- Prozesse der Intelligenz sind Prozesse der Symbolebene,
- die Gesetze und Invarianten der Symbolebene sind keine physikalischen Gesetze,
- Symbolsysteme lassen sich physikalisch realisieren.

In *Simon*[Si80] ist formuliert:

Intelligence is not a matter of substance but of the form the substance takes and the process it undergoes. At the root of intelligence are symbols, with their donative power and their suspectibility to manipulation. And symbols can be manufactured of almost anything that can be arranged and combined. Intelligence is mind implemented by any patternable kind of matter.

In Tabelle 1 sind relevante Strukturebenen eines Wissenssystems einschließlich der Hardware-Realisierung schematisch zusammengefaßt.

Zur Präzisierung des Begriffs eines *logikbasierten Wissenssystems* (im folgenden kurz *Wissenssystem* genannt) führen wir verschiedene Definitionen ein. Ein *logisches System* $LS = (L, M, \models)$ ist festgelegt durch eine formale Sprache L, einen Semantikbereich M, dessen Elemente Welten, Situationen u.ä. genannt werden, und eine Semantikrelation $\models \subseteq M \times L$. Wir setzen voraus, daß die Operation $C^{\models}(X) = \{\phi : Mod(X) \models \phi\}$ den Endlichkeitssatz erfüllt. Hierbei ist $Mod(X) = \{m : m \in M \text{ und } m \models \psi\}$ für alle $\psi \in X$. Eine *Wissensbasis* $WB = (L, M, \models, X)$ besteht aus einem logischen System $(L, M, \models)$ und einer Menge $X \subseteq L$ von Ausdrücken, die das Wissen über einen gewissen Bereich repräsentieren. Ein *Reasoning-System* $RS = (L, M, \models, X, \vdash, I, L_Q, Ans, L_O)$

enthält eine Wissensbasis $(L, M, \models, X)$, eine Ableitungsrelation $\vdash$, die bezüglich $\models$ korrekt ist; L_Q ist eine Sprache, in der Anfragen formuliert werden können und I ist eine Inferenzstrategie. Ans ist eine Operation, die für Anfrageformeln $\phi \in L_Q$ Antworten erzeugt, welche in der Sprache L_O formalisiert werden. Die Operation $C^{\vdash}(X) = \{\phi : X \vdash \phi\}$ hat die Hülleneigenschaften zu erfüllen, d.h. es gelten die Bedingungen: $X \subseteq C^{\vdash}(X)$, $C^{\vdash}(C^{\vdash}(X)) = C^{\vdash}(X)$ und $X \subseteq Y \Rightarrow C^{\vdash}(X) \subseteq C^{\vdash}(Y)$. Die Inferenzkomponente eines Reasoning-Systems ist gegeben durch das Teilsystem $(L, \vdash, I, L_Q, Ans, L_O)$. Ein *Wissenssystem* $WS = (RS, L_{KB}, L_i, U)$ ist eine Erweiterung eines Reasoning-Systems RS. Hierbei ist $L_{KB} \subseteq 2^{L(RS)}$, L_i ist eine Inputsprache und U eine Aktualisierungsoperation $U : L_{KB} \times L_i \to L_{KB}$. Ein Reasoning-System erfaßt die statische Seite der Wissensverarbeitung; durch ein Wissenssystem wird auch die Veränderung der aktuellen Wissenbasis durch eine Update-Operation berücksichtigt. [1] Eine weitere Verallgemeinerung bilden die kooperativen Wissenssysteme, die aus miteinander kommunizierenden elementaren Wissenssytemen zusammengesetzt sind.

Bei der Analyse grundlegender Aspekte der Wissensverarbeitung orientieren wir uns an dem Paradigma der *axiomatisch-deduktiven Methode*. Bei der Wissensverarbeitung lassen sich verschiedene Stufen unterscheiden. Zunächst wird von einem Objektbereich ausgegangen. Ein Objektbereich ist ein System von Dingen, die Objekte der realen Welt, unserer Anschauung oder unseres Denkens sein können. Entsprechend der konkreten Zielstellung der Wissensdarstellung und der durch die Wissensverarbeitung zu lösenden Probleme wird untersucht

- welche Grundobjekte (Individuen)
- welche Eigenschaften der Grundobjekte
- welche Beziehungen zwischen den Grundobjekten

wesentlich sind. Dann wird das Wissen über einen derartigen Objektbereich in einem geeigneten logischen Kalkül dargestellt. Objekte können von verschiedener Art sein: abstrakt oder konkret, primitiv oder komplex, aber auch fiktiv. Durch adäquate Auswahl und Spezifikation der Objekte, der Relationen und der Funktionen läßt sich ein abstraktes Modell $(G, R(G), F(G))$ definieren, welches eine bestimmte Sicht auf einen Objektbereich beschreibt. Dieses Modell heiße *Modellspezifikation* oder eine *Modellkonzeption* für den betrachteten Objektbereich. Die Definition dieses abstrakten Modells kann in der Mengentheorie erfolgen. Die Beschreibung eines Objektbereichs durch eine Modellspezifikation stellt eine Vereinfachung dar, da es in vielen Fällen nicht möglich ist, ein solches Modell eindeutig festzulegen. Im allgemeinen wird daher die Modellspezifikation eine Menge von abstrakten Modellen enthalten. Entsprechend der Modellspezifikation ist dann eine formale Darstellung für deren Komponente zu wählen.

[1] In dem Begriff eines Reasoning-Systems ist das nichtmonotone Schließen noch nicht berücksichtigt. Nichtmonotone Reasoning-Systeme enthalten eine zusätzliche Inferenzoperation $C : 2^L \to 2^L$, die nicht monoton sein kann. Die Semantik einer solchen Inferenzoperation kann durch einen Modelloperator $\Phi : 2^L \to 2^M$ erfaßt werden.

Wissensform	**Beschreibungssprache**
Objektbereich	natürliche Sprache
Modellierung	
Modell	Mengentheorie
Axiomatisierung	
Wissenssystem	Spezifikationssprache
Semantische Transformation	
Programm	Programmiersprache
Kompilierung	
Objektkode	Maschinensprache

Tabelle 2:

Der nächste Schritt ist die Axiomatisierung, die darin besteht, das in der Modellspezifikation gültige Wissen durch eine übersichtliche Menge von Aussagen formal zu charakterisieren. Hierbei ist Vollständigkeit anzustreben, d.h. jeder in der Modellspezifikation gültige Satz soll aus der Wissensbasis ableitbar sein.

Durch eine Transformation wird diese Wissensbasis schließlich in ein ausführbares Programm überführt. Dieses Programm sollte möglichst eine deklarative Semantik besitzen, also im Rahmen einer logischen Programmiersprache formalisiert sein. Diese verschiedenen Stufen sind in Tabelle 2 als vereinfachtes Schema zusammengefaßt.

Bei dem Aufbau von Wissenssystemen haben sich zwei Paradigmen herausgebildet: die *heuristik-basierten* Wissenssysteme und die *modell-basierten* Wissenssysteme. Bei einem heuristik-basierten Wissenssystem entstehen die Wissensbasen durch die Formalisierung von empirischen Regeln, über die ein Experte des betreffenden Bereichs verfügt. Diese Regeln beruhen nicht auf einem exakten Modell dieses Gebiets sondern werden durch die Erfahrung des Experten gerechtfertigt. Modellbasierte Wissenssysteme setzen eine Modellierungs- und Axiomatisierungsphase voraus. Die Wissensbasis eines modellbasierten Wissenssystems beruht daher auf einer axiomatischen Charakterisierung eines Wissensbereichs und orientiert sich an der axiomatisch-deduktiven Methode der exakten Wissenschaften. [2]

[2] Zwischen beiden Arten von Wissenssystemen gibt es fließende Übergänge. Auch eine heuristik-

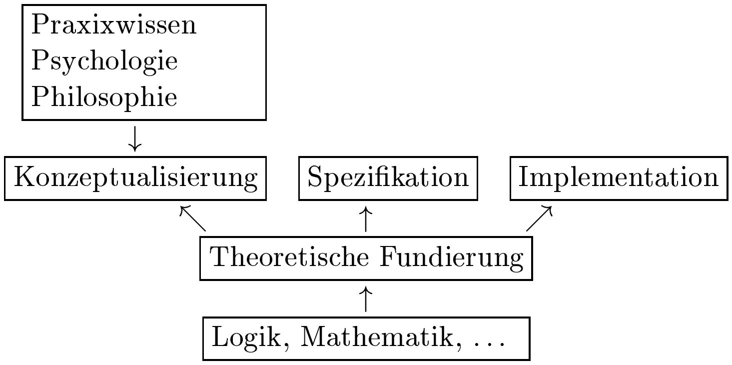

Tabelle 3:

Ein wichtiges Ziel der Forschung auf dem Gebiet der Wissensverarbeitung ist die Entwicklung einer universellen und uniformen Architektur für den Aufbau wissensbasierter Systeme. Die formale Logik kann wesentlich zu den theoretischen Grundlagen einer derartigen Architektur beitragen. In der Tabelle 3 sind grundlegende Beziehungen zwischen verschiedenen für die Wissensverarbeitung bedeutsamen wissenschaftlichen Disziplinen schematisch zusammengefaßt.

Die formalen Methoden der Logik und Mathematik spielen eine besondere Rolle bei der Analyse der Spezifikationsphase und für den Entwurf von Repräsentationssprachen. Die Konzeptualisierung richtet sich auf die Untersuchung konkreter Objektbereiche und muß daher wesentlichen Gebrauch von dem spezifischen Wissens des betreffenden Gebiets machen.

2 Aussagenlogik

Die Aussagenlogik ist ein Teilgebiet der Logik, das sich mit Verknüpfungen von Aussagen befaßt und dabei von einer prädikatenlogischen Struktur der Aussagen abstrahiert. Sie ist, als elementarer Teil der formalen Logik, ein unverzichtbarer Teil für jede ausdrucksfähigere Logik.

Unter einer Aussage ist jeder Satz zu verstehen, von dem es sinnvoll ist zu behaupten, daß sein Inhalt wahr oder falsch ist. Bei dem Aussagenkalkül wird auf die feinere logische Struktur der Aussage, die z.B. in der Beziehung zwischen Prädikat und Subjekt zum Ausdruck kommt, nicht eingegangen, sondern die Aussagen werden als Ganzes in ihrer logischen Verknüpfung mit anderen Aussagen betrachtet. Wegen seiner besonderen Einfachheit ist der Aussagenkalkül dazu geeignet, verschiedene Grundbegriffe der formalen Logik einzuführen und zu illustrieren.

---

basierte Wissensbasis kann als ein Axiomenssytem angesehen werden, das jedoch nicht auf ein Modell zurückgeführt werden kann, welches sich durch eine exakte Wissenschaft wie die Mathematik oder Physik beschreiben läßt.

2.1 Aussagen und Funktoren

Aussagen sind sprachliche Gebilde zur Mitteilung von Sachverhalten. Derartige Gebilde können auf verschiedene Weise repräsentiert werden: durch gesprochene Laute oder durch visuell wahrnehmbare Figuren, z.B. Zusammensetzungen von Schriftzeichen. Derartige Zeichenreihene über einem fixierten Alphabet werden dann über einem Objektbereich gedeutet. Grundlegend für die Präzisierung einer derartigen Deutungsrelation ist der auf Aristoteles zurückgehende Wahrheitsbegriff: Eine Aussage heißt wahr in einem Objektbereich, wenn der in ihr behauptete Sachverhalt in diesem Bereich zutrifft.

Aussagen können mittels gewisser Verknüpfungen zu neuen Aussagen zusammengesetzt werden. Derartige Verknüpfungsoperatoren heißen im folgenden aussagenlogische Funktoren. Für die Konstituierung des Aussagenkalküls werden zwei grundlegende Voraussetzungen gemacht: das Prinzip der Zweiwertigkeit und das Extensionalitätsprinzip.

Grundprinzipien der klassischen Aussagenlogik:

(A) *Zweiwertigkeitsprinzip*

(1) Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch

(2) Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten ("tertium non datur")

(B) *Extensionalitätsprinzip*

Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage hängt nur von Wahrheitswerten ihrer atomaren Bestandteile ab, nicht aber von deren inhaltlichen Sinn.

Aus den Prinzipien (A) und (B) folgt, daß man den aussagenlogischen Verknüpfungen "und" (Konjunktion), "oder" (Disjunktion), "wenn, so" (Implikation), "nicht" (Negation), "genau dann, wenn" (Äquivalenz) Wahrheitswertfunktionen zuordnen kann, die vom Kontext unabhängig sind.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

p	$\neg p$
0	1
1	0

Dementsprechend werden die Funktionen $\cap : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, genannt *et*-Funktion, $\cup : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, genannt *vel*-Funktion, $\triangleright$: $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, seq-Funktion, $\bowtie$: $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, eq-Funktion und $\setminus : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, genannt *non*-Funktion, eingeführt.

2.2 Syntax und Semantik des Aussagenkalküls

Sei $Al(AK)$ das *Alphabet* eines Aussagenkalküls AK, bestehend aus den folgenden Symbolen:

1. Variablen für Aussagen $p_0, p_1, p_2, \ldots$
2. Zeichen für die logischen Funktoren $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ und
3. technischen Hilfszeichen: $), ($

$Al(AK)^*$ sei die Menge aller Zeichenreihen über dem Alphabet $Al(AK)$, und Var sei die Menge aller Aussagenvariablen. Mit p, q, r, s bezeichnen wir irgendwelche Elemente aus Var (unbestimmt angenommen).

Def 2.1 (Begriff der Formel) *Die Menge $Fm(AK)$ der Formeln des Aussagenkalküls AK ist die kleinste Menge von Zeichenreihen über dem Alphabet $Al(AK)$, die die Variablen enthält und abgeschlossen ist gegenüber folgender Bedingung:*
wenn $A, B \in Fm(AK)$, so $\{(A \wedge B),\ (A \vee B),\ \neg A,\ (A \rightarrow B),\ (A \leftrightarrow B)\} \subseteq Fm(AK)$

Die Formeln aus Var heißen *atomar*. Eine Formel A heißt *Literal*, wenn sie atomar ist oder die Gestalt $\neg A$ für eine atomare Formel A hat. Wir vereinbaren, daß die die Außenklammern einer Formel weggelassen werden können. Zwei Formeln F und G sind syntaktisch gleich , notiert $F =_s G$, wenn F und G als Zeichenreihen übereinstimmen. Offensichtlich läßt sich entscheiden, ob eine Zeichenkette eine Formel ist. Auf der Grundlage der Definition 2.1 lassen sich induktive Beweise und Definitionen begründen.

Satz 2.1 (Prinzip der vollständigen Induktion für $Fm(AK)$) *Sei E eine Eigenschaft von Formeln, so daß gilt:*

1. *Alle atomaren Formeln aus* Var *haben die Eigenschaft E.*
2. *Wenn A, B die Eigenschaft E haben, so haben auch $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$ und $A \rightarrow B$ die Eigenschaft E.*

Dann hat jede Formel die Eigenschaft E.

Beweis: Die $ZR(E)$ sei die Menge aller Zeichenreihen aus der Wörterhalbgruppe $Al(AK)^*$ mit der Eigenschaft E. Dann gilt: Var $\subseteq ZR(E)$. Wegen Bedingung (2) gilt: $Fm(AK) \subseteq ZR(E)$, da $Fm(AK)$ die kleinste Menge ist, die (1) und (2) erfüllt.$\square$

Satz 2.2 (eindeutige Rekonstruktion) *Es seien A, B, C, D Formeln, und f, g Funktoren aus $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann folgt aus der syntaktischen Gleichheit der beiden Formeln $(A\ f\ B)$, $(C\ g\ D)$ die Beziehung $A =_s C$ und $B =_s D$ und $f =_s g$.*

Hinweis: Ein echtes Anfangsstück einer Formel ist keine Formel.

Eindeutige Rekonstruktion ist eine Eigenschaft der absolut freien Algebra oder Termalgebra.

Def 2.2 (Teilformel) *A sei eine Formel. Dann wird die Menge der Teilformeln $TF(A)$ wie folgt rekursiv definiert:*

1. *Wenn* $A = p \in \mathrm{Var}$ *ein Atom ist (eine Variable), so* $TF(A) = \{p\}$
2. $TF(\neg A) = TF(A) \cup \{\neg A\}$
3. *Seien* A, B *Teilformeln. Dann setzen wir* $TF(A*B) = TF(A) \cup TF(B) \cup \{A*B\}$, *für jeden Funktor* $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Def 2.3 (Rang einer Formel) *Der* Rang *einer Formel* $rg : Fm(AK) \rightarrow \mathbb{N}$ *wird definiert rekursiv durch*

1. $rg(p) = 0$ *für jede atomare Formel* $p \in \mathrm{Var}$
2. $rg(\neg A) = rg(A) + 1$
3. $rg(A \wedge B) = rg(A \vee B) = rg(A \rightarrow B) = rg(A \leftrightarrow B) = max\{rg(A), rg(B)\} + 1$ *für jede Teilformel* A *und* B.

Die Eindeutigkeit der obenstehenden Definitionen wird mit Hilfe der entsprechenden Rechtfertigungssätze nachgewiesen.

Def 2.4 (Belegung) *Eine Abbildung* $f : \mathrm{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ *heißt* Belegung.

f läßt sich rekursiv in eindeutiger Weise zu einer Funktion f^* erweitern, $f^* : Fm(AK) \rightarrow \{0, 1\}$, so daß gilt:

1. $f^*(p) = f(p)$ für $p \in \mathrm{Var}$
2. $f^*(A \wedge B) = f^*(A) \cap f^*(B)$
3. $f^*(A \vee B) = f^*(A) \cup f^*(B)$
4. $f^*(A \rightarrow B) = \backslash f^*(A) \cup f^*(B)$
5. $f^*(\neg A) = \backslash f^*(A)$

wobei $B_2 = (\{0, 1\}, \cap, \cup, \backslash)$ eine Boolsche Algebra ist. $\mathrm{val}(f, A) = \mathrm{val}_f(A) = f^*(A)$ bezeichnet dann den Wert von A bezüglich der Belegung f.

Def 2.5 *Die Erfüllbarkeits- oder Wahrheitsrelation* $\models \subseteq 2^{\mathrm{Var}} \times Fm(AK)$ *ist durch die folgende Beziehung definiert.* f erfüllt *die Formel* A, *notiert* $f \models A$, *wenn* $\mathrm{val}_f(A) = 1$ *ist.*

Def 2.6 (Modell) *Eine Interpretation* f *heißt* Modell *von* $X \subseteq Fm(AK)$, *wenn für alle Formeln aus* X *gilt* $f \models A$ *(*f *erfüllt* A*). Die* Modellklasse *von* X *(die Menge aller Modelle von* X*) wird durch* $M(X)$ *bezeichnet:*

$$M(X) = \{f | f \in 2^{\mathrm{Var}} \text{ und } f \text{ erfüllt jede Formel } A \in X\}$$

Def 2.7 *Eine Formel A heißt* logisch gültig *oder* allgemeingültig*, wenn $f \models A$ für alle $f \in 2^{\mathrm{Var}}$.*

A ist logisch gültig genau dann, wenn $M(A) = 2^{\mathrm{Var}}$.

Beispiel: Seien $g \in 2^{\mathrm{Var}}$, $g(p) = 0$, $g(q) = 1$. Dann gilt:

$$g((\neg p \wedge q) \to p) = 0, \quad g((p \vee \neg p) \to q) = 1, \quad g \models ((p \vee \neg p) \to q),$$
$$M(\{(p \vee \neg p) \to q\}) = \{f | f \in 2^{\mathrm{Var}} \text{ und } f(q) = 1\}$$

Satz 2.3 *Sei $A(p_1, \dots, p_n)$ eine Formel aus $Fm(AK)$, $\mathrm{Var}(A) = \{p_1, \dots, p_n\}$, $f, g \in 2^{\mathrm{Var}}$. Wenn die Belegungen f und g äquivalent bezüglich der Variablen $p_1, \dots, p_n$ sind, notiert durch $f \equiv_{\{p_1, \dots, p_n\}} g$, so gilt: $f \models A \longleftrightarrow g \models A$.*

Aus diesem Satz folgt, daß der Wert einer Formel nur von der Interpretation der in dieser Formel vorkommenden Variablen abhängt. Insbesondere hängt also die Erfülbbarkeit einer Formel F nur von den in F vorkommenden Variablen ab. Jeder Formel F kann eine *Wahrheitswerttabelle* zugeordnet werden, in der für jede Interpretation der in F vorkommenden Variablen der Wert von F eingetragen ist. Für jede beliebige Interpretation f kann dann $wert_f(F)$ direkt aus einer solchen Tabelle abgelesen werden. Für die Erzeugung einer Wahrheitswerttabelle hat es sich als sinnvoll erwiesen, die Wahrheitswerte einer gegebenen Formel schrittweise aus den Wahrheitswerten der Teilformeln zu berechnen.

Beispiel: Für $A = (p \vee q) \leftrightarrow \neg r$ betrachte man die zugehörige Wahrheitswertetabelle

p	q	r	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	r
0	0	0	0	0	1	
0	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	1	
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	

Def 2.8 (Theorie) *Unter der* Theorie *einer Belegung $f \in 2^{\mathrm{Var}}$ versteht man die Menge aller von f erfüllten Formeln aus $Fm(AK)$:*

$$T(f) = \{A | A \in Fm(AK),\ f \models A\}$$

Analog erweitert man T auf eine Teilmenge $F \subseteq 2^{\mathrm{Var}}$:

$$T(F) = \{A | A \in Fm(AK),\ f \models A \text{ für alle } f \in F\}$$

Sei $F \subseteq 2^{\mathrm{Var}}$, $\bar{F} = M(T(F))$. Gilt $F = \bar{F}$, so heißt F *abgeschlossen.*

Es gelten folgende Beziehungen:

1. Wenn $F_1, F_2 \subseteq 2^{\mathrm{Var}}$ und $F_1 \subseteq F_2$, so $T(F_2) \subseteq T(F_1)$ (je mehr Interpretationen es gibt, umso weniger Formeln sind Theoreme).

2. Wenn $T_1, T_2 \subseteq Fm(AK)$ und $T_1 \subseteq T_2$, so $M(T_2) \subseteq M(T_1)$ (je mehr Formeln eine Theorie enthält, umso kleiner ist die beschriebene Welt).

$Ag = \{A \mid M(A) = 2^{\mathrm{Var}}\} = T(2^{\mathrm{Var}})$ ist die Menge der allgemeingültigen Formeln, $Ef = \{A \mid M(A) \neq \emptyset\}$ bezeichne die Menge der erfüllbaren Formeln, $Kd = \{A \mid M(A) = \emptyset\}$ sei die Menge der Kontradiktionen, d. h. die Menge der Formeln, die keine einzige erfüllende Interpretation besitzen.

Eine *Substitution* für $Fm(AK)$ sei eine Funktion $\Theta : \mathrm{Var} \to Fm(AK)$, die jeder Aussagenvariablen eine Formel zuordnet. Θ läßt sich auf natürliche Weise auf die ganze Menge $Fm(AK)$ erweitern. Diese Erweiterung werde mit Θ^* bezeichnet.

Die grundlegenden Eigenschaften von Ag, Ef und Kd werden nun im folgenden Satz zusammengefaßt:

Satz 2.4 *Für alle Formeln A, B gilt:*

1. *Wenn $(A \to B) \in Ag$ und $A \in Ag$, so $B \in Ag$*

2. *Wenn $A \in Ag$, so $\Theta^*(A) \in Ag$ für jede Substitution $\Theta : \mathrm{Var} \to Fm(AK)$.*

3. *$A \in Ag$ gdw. $(\neg A) \in Kd$*

4. *$A \in Ag$ gdw. $(\neg A) \notin Ef$*

Beweis:

(1) Sei $A \to B \in Ag$ und $A \in Ag$. Zu zeigen ist, $B \in Ag$, d. h. $M(B) = 2^{\mathrm{Var}}$. Aus $M(A) = 2^{\mathrm{Var}}$ folgt $M(\neg A) = \emptyset$. Es ist aber $M(A \to B) = M(\neg A) \cup M(B) = 2^{\mathrm{Var}}$. Folglich ist $M(B) = 2^{\mathrm{Var}}$.$\square$

Beispiele für allgemeingültige Formeln:

1. $(p \to q) \to \big((q \to r) \to (p \to r)\big)$ (Kettenschluß)

2. $(p \wedge q \to r) \to \big(p \to (q \to r)\big)$ (Exportregel)

3. $p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$ (Importregel)

4. $p \wedge \neg p \to p$ (Gesetz von Duns Scotus)

5. $p \vee \neg p$ (tertium non datur)

6. $\neg(p \wedge \neg p)$ (ausgeschlossener Widerspruch)

7. $p \to p$ (Selbstimplikation)
8. $(p \to ((p \to q) \to q)$
9. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
10. $\big(p \to (q \to r)\big) \to \big(q \to (p \to r)\big)$ (Prämissenvertauschung)
11. $\big((p \to (q \to r)\big) \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$ (FREGEscher Kettenschluß oder Selbstdistributivität)
12. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (Kontraposition)
13. $\big((p \to q) \to p\big) \to p$ (Gesetz von PIERCE)

2.3 Logische Äquivalenz und Normalformen

FRAGE: wann sind zwei Formeln als gleich anzusehen? Wenn sie syntaktisch übereinstimmen? Dann folgt aber $p \to q \neq_s \neg p \vee q$. Das gewünschte gewährleistet die semantische Äquivalenz: $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

Def 2.9 *Zwei Formeln A,B heißen* logisch äquivalent *(*semantisch äquivalent, wertverlaufsgleich*), notiert $A \equiv B$, wenn für alle Interpretationen $f \in 2^{\mathrm{Var}}$ gilt: $f(A) = f(B)$.*

Def 2.10 *Sei $Fm(n)$ die Menge der Formeln, in denen höchstens die Variablen $p_1, \ldots, p_n$ vorkommen, also*

$$Fm(n) = \big\{A/\mathrm{Var}(A) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}\big\}$$

Sei $A \in Fm(n)$, dann läßt sich der Formel A eine n-stellige Boolesche Funktion $\beta_n(A) : 2^n \to 2$ zuordnen[3], wobei $\beta_n(A)(a_1, \ldots, a_n) = b$ genau dann, wenn es eine Belegung $f \in 2^{\mathrm{Var}}$ gibt, so daß $f(p_1) = a_1, \ldots, f(p_n) = a_n$ und $\mathrm{val}(f, A) = b$ gilt (andere Bezeichnung $\hat{f}(A) = b$).

Satz 2.5 *Für beliebige Formeln A,B sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. $A \equiv B$
2. $(A \leftrightarrow B) \in Ag$
3. $M(A) = M(B)$
4. $\beta_n(A) = \beta_n(B)$, *wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist, die die Bedingung* $\mathrm{Var}(A) \cup \mathrm{Var}(B) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$ *erfüllt.*

Beweis:

---

[3] $2 \widehat{=} \{0, 1\}$

(1) → (2) $A \equiv B$ genau dann, wenn für alle Interpretationen $f \in 2^{\mathrm{Var}}$ gilt $f(A) = f(B)$ $\iff f \models (A \leftrightarrow B) \iff (A \leftrightarrow B) \in Ag$

(2) → (3) Wenn $(A \leftrightarrow B) \in Ag$, so gilt für alle $f \in 2^{\mathrm{Var}}$: $f(A) = f(B) \iff (f \models A$ genau dann, wenn $f \models B) \iff M(A) = M(B)$.

(3) → (4) Sei $\mathrm{Var}(A) \cup \mathrm{Var}(B) \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$ und $M(A) = M(B)$. Zu zeigen: $\beta_n(A) = \beta_n(B)$.
Angenommen: $\beta_n(A) \neq \beta_n(B)$. Dann existiert eine Interpretation $f \in 2^{\mathrm{Var}}$ mit $f(p_1) = a_1, \dots, f(p_n) = a_n$, so daß $f(A) \neq f(B)$. O. B. d. A. $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Es ist weiter $f \in M(B)$, $f \notin M(A)$ $\curvearrowright$ $M(A) \neq M(B)$.

(4) → (1) Sei $f \in 2^{\mathrm{Var}}$ eine beliebige Interpretation. Dann gilt

$$\beta_n\big(A(p_1, \dots, p_n)\big)(a_1, \dots, a_n) = f(A)$$
$$\beta_n\big(B(p_1, \dots, p_n)\big)(a_1, \dots, a_n) = f(B)$$

für geeignete a_i mit $f(p_i) = a_i$. Es folgt $f(A) = f(B)$ $\curvearrowright$ $A \equiv B$.□

Beispiele aussagenlogischer Äquivalenzen

1. $A \wedge A \equiv A, \quad A \vee A \equiv A$ (Idempotenz)
2. $A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A$ (Kommutativität)
3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C, \quad A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (Assoziativität)
4. $A \wedge (B \vee A) \equiv A, \quad A \vee (B \wedge A) \equiv A$ (Absorbtion oder Verschmelzung)
5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Distributivität)
6. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (Regeln von de Morgan)
7. $\neg\neg A \equiv A$ (doppelte Verneinung)
8. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
9. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Weitere Äquivalenzen (wichtig für Beweise)

1. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (Kontraposition)
2. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$
3. $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$
4. $A \rightarrow (B \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$
5. $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$

6. $(A \vee B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$

Die logische Äquivalenz $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf $Fm(AK)$. $\equiv$ erfüllt folgende weitere Eigenschaften:

Für alle Formeln A, A_1, B, $B_1 \in Fm(AK)$ gilt: wenn $A \equiv A_1$ und $B \equiv B_1$, so $A * B \equiv A_1 * B_1$ für jedn Funktor $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, und $\neg A \equiv \neg A_1$ (D. h. $\equiv$ ist eine *Kongruenzrelation*).

Satz 2.6 (Ersetzungstheorem) *Wenn $A \equiv B$ und C^* aus der Formel C dadurch entsteht, indem die in C vorkommende Teilformel A (an einer Stelle des Vorkommens) durch B ersetzt wird, dann gilt: $C \equiv C^*$.*

Beweis: (induktiv über die Komplexität von C)

1. Gilt $C := p \in \mathrm{Var}$, so ist $A = C$ und damit $B = C^*$, also $C \equiv C^*$.
2. (a) Sei $C := \neg R$; nach Induktionsvoraussetzung ist der Satz für R bewiesen. A sei eine Teilformel von C. Dann ist entweder
      i. $A = \neg R = C$ (trivial) oder
      ii. A ist eine Teilformel von R. In diesem Fall gilt nach Induktionsvoraussetzung $R \equiv R^*$ (R^* ergibt sich durch Ersetzung von A durch B) $\iff \neg R \equiv \neg R^* \iff C \equiv C^*$

   (b) Sei $C = C_1 \wedge C_2$. Im nichttrivialen Fall ist A Teilformel von C_1 oder C_2, o. B. d. A. sei A Teilformel von C_1. Dann folgt nach Induktionsvoraussetzung $C_1 \equiv C_1^*$, $C^* = C_1^* \wedge C_2 \equiv C_1 \wedge C_2$
3. Die übrigen Fälle analog.□

Die Kongruenzrelation $\equiv$ induziert eine Zerlegung $Fm(AK)_{/\equiv}$ in Äquivalenzklassen, wobei $[A] = \{B / A \equiv B\}$ ist.

PROBLEM: einen besonders geeigneten Repräsentanten auszuwählen.

Def 2.11

1. *Eine Formel A heißt* negationstechnische Normalform (NF), *wenn alle in A vorkommenden Negationszeichen nur noch unmittelbar vor Variablen stehen.*
2. *A heißt* konjunktive Normalform (KNF), *wenn A eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.*

$$A = \bigwedge_{i \leq m} \Big(\bigvee_{j \leq m_i} A_{ij} \Big),$$

   wobei A_{ij} Literale (Variablen oder negierte Variablen) sind.

3. *A ist eine* disjunktive Normalform (DNF), *wenn A eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist.*

$$A = \bigvee_{i \leq m} \Big(\bigwedge_{j \leq m_i} A_{ij} \Big),$$

Jede Formel ist logisch äquivalent zu einer negationstechnischen Normalform. Um eine gegebene Formel in diese Form zu bringen, führe man schrittweise für alle Teilformeln A und B folgende äquivalente Umformungen durch:

1. $\neg\neg A \equiv A$,
2. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
3. $(A \to B) \equiv \neg A \vee B$
4. $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

Nach endlich vielen Schritten ergibt sich die negationstechnische Normalform.

Beispiel:

$$\begin{array}{cc} \neg\neg\neg((p \vee q) \to \neg(r \wedge s \to u)) & \curvearrowright \\ \neg((p \vee q) \to \neg(r \wedge s \to u)) & \curvearrowright \\ \neg(\neg(p \vee q) \vee \neg(r \wedge s \to u)) & \curvearrowright \\ (p \vee q) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee u) & \end{array}$$

Satz 2.7 *Zu jeder Formel A existiert eine logisch äquivalente konjunktive Normalform B und disjunktive Normalform C.*

Beweis: Wir können voraussetzen, daß in A weder $\to$ noch $\leftrightarrow$ vorkommen. Weiterhin kann angenommen werden, daß A eine negationstechnische Normalform ist. Der Beweis erfolgt nun induktiv über den Aufbau der negationstechnischen Normalform.

Anfangsschritt: A ist ein Literal (trivial).

Induktionsschritt: sei $C = A \wedge B$ oder $C = A \vee B$; auf A und B ist Induktionsvoraussetzung anwendbar, d. h. es existieren konjunktive Normalformen A_1 und B_1, so daß $A \equiv A_1$, $B \equiv B_1$. Dann folgt:

1. $C := A \wedge B$; $A_1 \wedge B_1$ ist bereits konjunktive Normalform.
2. $C := A \vee B$; $A \vee B \equiv A_1 \vee B_1$, A_1, B_1 sind konjunktive Normalform.

   Seien nun $A_1 = \Big(\bigwedge_{i \leq m} D_i\Big)$, $B_1 = \Big(\bigwedge_{j \leq n} E_j\Big)$, D_i, E_j sind Disjunktionen von Literalen.
   Dann gilt: $A_1 \vee B_1 = \Big(\bigwedge_{i \leq m} D_i\Big) \vee \Big(\bigwedge_{j \leq n} E_j\Big) \equiv \bigwedge_{j \leq n} \Big(\Big(\bigwedge_{i \leq m} D_i\Big) \vee E_j\Big) \equiv \bigwedge_{j \leq n} \Big(\bigwedge_{i \leq m} (D_i \vee E_j)\Big) \equiv \bigwedge_{j \leq n} \bigwedge_{i \leq m} (D_i \vee E_j)$

Analog für disjunktive Normalform.□

Def 2.12 *Eine Boolesche Funktion $g : 2^n \to 2$ heißt* aussagenlogisch repräsentierbar, *wenn eine Formel A existiert, so daß $\beta_n(A) = g$*

Def 2.13 *Eine Menge von Funktoren für eine aussagenlogische Sprache heißt* vollständig, *wenn sich jede Boolesche Funktion mittels Verwendung dieser Funktoren repräsentieren läßt.*

Beispiel: Die Menge der Funktoren $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ist vollständig.

Verallgemeinerung: F sei endliche Menge von Booleschen Funktionen. $\Sigma(F) = \{f_g / g \in F\}$, f_g bezeichnet die Funktion g.

FRAGE: Für welche F ist der Kalkül $AK(\Sigma(F))$ vollstängig?

Satz 2.8 (Funktionale Vollstängigkeit) *Jede Boolesche Funktion ist durch eine disjunktive (konjunktive) Normalform repräsentierbar.*

Beweis: Sei $f : 2^n \to 2$ eine beliebige Boolesche Funktion. Anzugeben ist eine disjunktive Normalform $A_f(p_1, \ldots, p_n)$, so daß $g(A_f) = f(g(p_1), \ldots, g(p_n))$ für jede Belegung $g \in 2^{\mathrm{Var}}$.

1. Wenn $f \equiv 0$, so leistet die folgende Formel das Verlangte $A_f := \bigvee_{i \leq n}(p_i \wedge \neg p_i)$

2. $f \not\equiv 0$: Wir führen folgende Schreibweise ein: $p^a = \begin{cases} p, & \text{falls } a = 1 \\ \neg p, & \text{falls } a = 0 \end{cases}$

   Offensichtlich gilt für eine Belegung f die Beziehung $f(p_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{a_n}) = 1$ gdw. $f(p_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   Nun sei $\Omega = \{p_1^{a_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{a_n} / f(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$, und $A_f = \bigvee \Omega$.
   Dann gilt: $\beta_n(A_f) = f$.
   Sei nämlich $(a_1, \ldots, a_n) \in 2^n$, $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$ und g eine Belegung mit $g(p_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.
   Zu zeigen ist $g(A_f) = f(g(p_1), \ldots, g(p_n)) = 1$. Da $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$, so enthält A_f ein Disjunktionsglied der Gestalt $p_1^{a_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{a_n}$.
   Offensichtlich $g(p_1^{a_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{a_n}) = 1$. Nun sei $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, dann ist $p_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{a_n} \notin \Omega$. Folglich gilt für alle $K(p_1, \ldots, p_n) \in \Omega$ die Bedingung $g(K(p_1, \ldots, p_n)) = 0$, und damit $\beta_n(A_f)(a_1, \ldots, a_n) = 0$.□

Da jede aussagenlogische Formel eine Boolelsche Funktion repräsentiert, kann die im Beweis von Satz 2.8 angegebene Methode dazu genutzt werdedn, für eine gegebene Formel eine KNF bzw. eine DNF anzugeben. Im folgenden Beispiel wird die Konstruktion dazu verwendet, um aus einer Wahrheitswerttabelle einer Formel eine logisch äquivalente konjunktive oder disjunktive Normalform direkt abzulesen.

Beispiel: Man bringe die Formel $r \leftrightarrow \neg q \vee p$ in disjunktive Normalform.

p	q	r	$r \leftrightarrow \neg q \vee p$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Hieraus ergibt sich die disjunktive Normalform
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

2.4 Folgerungsbegriff

Def 2.14 *X sei eine Menge von Formeln.*

1. *Aus X* folgt *eine Formel A, notiert $X \models A$, falls jede die Menge X erfüllende Belegung auch die Formel A erfüllt, d. h. $M(X) \subseteq M(\{A\})$.*
2. *Wenn $X \subseteq Fm(AK)$, so sei $X^{\models} = \{A \in Fm(AK) \mid X \models A\}$ (die Menge aller Formeln, die aus X folgen).*

Beispiel: $X = \{q \to p, \neg q \to p\} \curvearrowright X \models p$.
Beweis: Sei $f \in M(X) \curvearrowright f(q \to p) = 1$, $f(\neg q \to p) = 1$.
Nun gilt $f(q) = 1 \vee f(\neg q) = 1$. O. B. d. A. $f(q) = 1$. Da $f \models q \to p$, so $\curvearrowright f(p) = 1 \curvearrowright f \in M(\{p\})$.$\square$

Satz 2.9 (Eigenschaften von $\models$) *X,Y seien Formelmengen*

1. *$X \subseteq X^{\models}$ (Inklusion)*
2. *$\left(X^{\models}\right)^{\models} \subseteq X^{\models}$ (Idempotenz)*
3. *Wenn $X \subseteq Y$, so $X^{\models} \subseteq Y^{\models}$ (Monotonie)*

Beweis: (2) Sei $A \in \left(X^{\models}\right)^{\models}$. $X^{\models} \models A$ folgt unmittelbar aus $M(X) = M(X^{\models})$.$\square$

Bemerkung: $\models$ ist ein Hüllenoperator auf $\mathrm{Pow}(Fm(AK))$. $cl(K) = M(T(K))$ für $K \subseteq 2^{\mathrm{Var}}$ ist ebenfalls ein Hüllenoperator.

Satz 2.10 *Für alle Formeln A, B sowie $X \subseteq Fm(AK)$ gilt:*

1. *Wenn $X \models A \to B$ und $X \models A$, so $X \models B$ (Modus Ponens)*
2. *Wenn $X \models A \to B$, so $X \cup \{A\} \models B$ (Ableitungstheorem)*
3. *Wenn $X \cup \{A\} \models B$, so $X \models A \to B$ (Deduktionstheorem)*[4]

[4] Ableitungstheorem und Deduktionstheorem sind auseinanderzuhalten, denn es gibt Kalküle, wo sie nicht gleichzeitig gelten.

Beweis:

1. Zu zeigen ist $X \models B \iff M(X) \subseteq M(B)$:
$f \in M(X) \curvearrowright f \vDash X \curvearrowright f \vDash A \to B,\ f \models A \curvearrowright f(A \to B) = 1,\ f(A) = 1 \curvearrowright$ f(B)=1 $\curvearrowright f \in M(B)$.

2. Zu zeigen ist $X \cup \{A\} \vDash B \iff M(X \cup \{A\}) \subseteq M(B)$:
$f \in M(X \cup \{A\}) \curvearrowright f \vDash X \cup \{A\} \curvearrowright f \vDash A \to B$. Da $f(A) = 1 \curvearrowright f(B) = 1$

3. Zu zeigen ist $X \vDash A \to B \iff$ aus $f \vDash X$ folgt $f \vDash A \to B$:
Sei $f(A) = 1 \curvearrowright f \vDash X \cup \{A\} \curvearrowright f \vDash B$.□

Satz 2.11 *$X \subseteq Fm(AK)$, $A \in Fm(AK)$. Dann gilt:*

1. $M(X \cup \{A\}) = \emptyset \iff X \vDash \neg A$

2. $M(X) = \emptyset \iff X^{\vDash} = Fm(AK) \iff X \vDash A \wedge \neg A,\ A \in Fm(AK)$.

3. $\emptyset^{\vDash} = Ag$ *(Menge der logisch gültigen Formeln).*

Beweis:

1. ($\to$) Sei $M(X \cup \{A\}) = \emptyset$. Zu zeigen ist $X \vDash \neg A$. Angenommen, $X \nvDash \neg A \curvearrowright$ ex existiert eine Belegung $v \in M(X)$, so daß $v \nvDash \neg A \curvearrowright v \vDash A \curvearrowright v \in M(X \cup \{A\}) \neq \emptyset$. Widerspruch

   ($\leftarrow$) Sei $X \vDash \neg A$ und $M(X \cup \{A\}) \neq \emptyset$. Dann existiert $v \in 2^{\mathrm{Var}}$ mit $v \vDash X, A$ $\curvearrowright X \nvDash \neg A$. Widerspruch

2. ($\to$) Sei $M(X) = \emptyset$. Dann gilt für alle $A \in Fm$: $X \vDash A$, denn $\emptyset = M(X) \subseteq M(A)$ gilt immer $\curvearrowright X \vDash A \wedge \neg A$.

   ($\leftarrow$) $X \vDash A \wedge \neg A \curvearrowright M(X) = \emptyset$, da für alle Belegungen $v \in 2^{\mathrm{Var}}$ gilt: $v \nvDash A \wedge \neg A$.

3. Sei $\emptyset \vDash A$. Es genügt zu zeigen: $M(\emptyset) = 2^{\mathrm{Var}}$. $v \vDash \emptyset \iff (\forall \varphi)(\varphi \in \emptyset \to v \vDash \varphi)$ (nach Definition).□

Def 2.15 (Vollständigkeit einer Formelmenge)
Eine Formelmenge $X \subseteq Fm$ heißt vollständig, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $A \notin X \iff \neg A \in X$

2. $A \wedge B \in X \iff \{A, B\} \subseteq X$

3. $A \vee B \in X \iff \{A, B\} \cap X \neq \emptyset$

4. $A \to B \in X \iff \{\neg A, B\} \cap X \neq \emptyset$

Def 2.16 (Maximalität) *X heißt* maximal, *wenn X erfüllbar ist (d. h. $M(X) \neq \emptyset$), und jede echte Obermenge von X nicht erfüllbar ist.*

Def 2.17 (endliche Erfüllbarkeit) *X heißt* endlich erfüllbar*, genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von X erfüllbar ist.*

Satz 2.12 *Sei $X \subseteq Fm$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *X ist vollständig,*
2. *Es existiert eine Interpretation $v \in 2^{\mathrm{Var}}$ mit $T(v) = X$,*
3. *X ist maximal.*

Beweis:

(1) $\to$ (2) X sei vollständig und v sei so definiert: $v(p) = 1 \iff p \in X$. Induktiv über den Formelaufbau zeigt man $v \models A \iff A \in X$ ($\curvearrowright T(v) = X$).

1. Sei A ein Atom. Dann ist die Induktionsvoraussetzung trivialerweise erfüllt nach Definition von v.
2. Sei $A := B_1 \wedge B_2$; $v \models B_1 \wedge B_2 \iff v \models B_1$ und $v \models B_2 \iff$ (nach Induktionsvoraussetzung) $B_1, B_2 \in X \iff B_1 \wedge B_2 = A \in X$.
3. Die übrigen Fälle analog.

(2) $\to$ (3) Sei $T(v) = X$ für eine Belegung $v \in 2^{\mathrm{Var}}$. Angenommen, $A \notin X \curvearrowright v \not\models A \curvearrowright v \models \neg A \curvearrowright \neg A \in X \curvearrowright M(X \cup \{A\}) = \emptyset$.

(3) $\to$ (1) X sei maximal, $M(X) \neq \emptyset$. Sei $v \in M(X)$, $X \subseteq T(v)$. Da X maximal ist, gilt: $T(v) = X$. Nun zeigt man leicht, daß X vollständig ist: $A \notin X \iff A \notin T(v) \iff v \not\models A \iff v \models \neg A \iff \neg A \in X$.$\Box$

Satz 2.13 *X sei eine endlich erfüllbare Menge von Formeln. Dann existiert eine Menge $Y \subseteq Fm$ mit*

1. *$X \subseteq Y$,*
2. *Y ist endlich erfüllbar,*
3. *Wenn $A \notin Y$, so ist $Y \cup \{A\}$ nicht endlich erfüllbar.*

Beweis: Nach dem Zornschen Lemma genügt es folgendes zu zeigen:
Wenn in einer Folge von Mengen $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \cdots$ jede Menge X_i endlich erfüllbar ist, dann ist auch $X^* = \bigcup_{i<\omega} X_i$ endlich erfüllbar.
Angenommen, X^* ist nicht endlich erfüllbar, dann existiert eine endliche Teilmenge $X_e \subseteq X$, so daß $M(X_e) = \emptyset$. Da $|X_e| < \omega$, so existiert ein $j < \omega$, so daß $X_e \subseteq X_j$ $\curvearrowright X_j$ nicht endlich erfüllbar ist. Widerspruch.

Um den Vollständigkeitssatz in zwei Versionen anbringen zu können, beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

Satz 2.14 *Es sei X eine Menge von Formeln, $A \in Fm$. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

1. *X ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von X erfüllbar ist.*
2. *Wenn $X \vDash A$, so existiert eine endliche Teilmenge X_e von X mit $X_e \vDash A$.*

Beweis:

(1) $\rightarrow$ (2) Sei $X \vDash A$. Zu zeigen ist, es existiert $X_e \subseteq X$, so daß $|X_e| < \omega$, $X_e \vDash A$. Angenommen, eine solche Menge X_e existiert nicht. Dann folgt: für jede endliche Teilmenge $X_e \subseteq X$ existiert eine Belegung $v \in 2^{\text{Var}}$: $v \vDash X_e$. Aber $v \vDash \neg A$ $\curvearrowright$ jede endliche Teilmenge von $X \cup \{\neg A\}$ ist erfüllbar. Nach (1) ist $X \cup \{\neg A\}$ erfüllbar $\curvearrowright$ $X \nvDash A$. Widerspruch

(2) $\rightarrow$ (1) Jede endliche Teilmenge von X sei erfüllbar. Zu zeigen, X ist erfüllbar. Beweis indirekt:
Angenommen, X ist nicht erfüllbar, dann $M(X) = \emptyset$ $\curvearrowright$ $X \vDash p \wedge \neg p$. Nach (2) existiert eine endliche Teilmenge $X_e \subseteq X$ mit $X_e \vDash p \wedge \neg p \iff M(X_e) = \emptyset$. Widerspruch

□

Satz 2.15 (Endlichkeitssatz) *Sei $X \subseteq Fm$, jede endliche Teilmenge von X sei erfüllbar. Dann ist auch X erfüllbar.*

Beweis: Es existiert eine maximale endlich erfüllbare Menge $Y \supseteq X$ mit angegebenen Eigenschaften. Es genügt zu zeigen, daß Y vollstängig ist. Hieraus folgt die Existenz einer Belegung $v \in 2^{\text{Var}}$ mit $Y = T(v)$, damit erfüllt v die Formelmenge X: $v \vDash X$ $[v(p) = 1 \iff p \in Y]$.

1. $A \notin Y \iff \neg A \in Y$
   Aus der endlichen Erfüllbarkeit von Y folgt für alle $A \in Fm(AK)$: $A \notin Y$ oder $\neg A \notin Y$ (nicht möglich $\{A, \neg A\} \subseteq Y$, da wir schon eine endliche Teilmenge hätten, die nicht erfüllbar ist).
   Zu zeigen, $A \in Y$ oder $\neg A \in Y$. Indirekt: angenommen, $\{A, \neg A\} \cap Y = \emptyset$, dann sind die Mengen $Y \cup \{A\}$, $Y \cup \{\neg A\}$ wegen der Maximalität von Y nicht endlich erfüllbar. D. h. es existieren endliche Teilmengen $Y_1, Y_2 \subseteq Y$, so daß $M(Y_1 \cup \{A\}) = M(Y_2 \cup \{\neg A\}) = \emptyset$. Folglich gilt für $Y_3 = Y_1 \cup Y_2$: $M(Y_3) = \emptyset$.

Satz 2.16 *Sei $X \subseteq Fm(AK)$, jede Belegung $v \in 2^{\text{Var}}$ möge eine Formel aus X erfüllen. Dann existieren Formeln $A_1, \dots, A_n \in X$, so daß $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ allgemeingültig ist.*

Beweis: Angenommen, eine solche endliche Menge existiert nicht. Dann ist jede endliche Teilmenge von $\{\neg A / A \in X\}$ erfüllbar $\big[$ d. h. für alle $X_e \subseteq X$ mit $|X_e| < \omega$ existiert

eine Belegung v, die $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ widerlegt: $X_e = \{A_1, \ldots, A_n\}$; $v \not\models A_1 \vee \cdots \vee A_n$ $\Longleftrightarrow v \models \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \iff v \models \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}]$.
Nach dem bereits bewiesenen Endlichkeitssatz ist damit die Menge $\{\neg A / A \in X\}$ erfüllbar $\curvearrowright$ Widerspruch zur Voraussetzung.$\Box$

2.5 Ableitungsbegriff

Das syntaktische Analogon zur Folgerungsrelation ist doe Ableitungsrelation. Bei der Ableitungsrelation wird inhaltliches Schließen durch die formale Manipulation von Zeichenreihen ersetzt. Solche Umformungen von Zeichenreihen erfolgen nach gewissen Regeln Ein Ableitungsschritt wird als Anwendung einer bestimmten Regel verstasnden. Eine derartige Ableitungsrelation muß die gleichen strukturellen Eigenschaften besitzen wie die Folgerungsrelation $\models$. Insbesonderen mßsen die in Abschnitt 2.4 formulierten Hülleneigenschaften und der Endlichkeitssatz gelten Diese Eigenschaften lassen sich in abstrakter Weise durch den Begriff einer Deduktionsrelation und eines Deduktionssystems erfassen. Diese Begriffe gehen auf *A. Tarski* [**?**] zurück.

Def 2.18 (Deduktionsrelation) *Eine* Deduktionsrelation $\vdash$ *für den Aussagenkalkül ist eine Relation* $\vdash \subseteq \mathrm{Pow}(Fm) \times Fm$*, so daß gilt:*

1. $A \in X$*, so* $X \vdash A$ *(Einbettung)*
2. *Wenn* $X \vdash A$ *und* $X \subseteq Y$*, so* $Y \vdash A$ *(Monotonie)*
3. *Wenn für alle* $A \in Y \supseteq X$ *gilt* $X \vdash A$ *und* $Y \vdash B$*, so* $X \vdash B$ *(Abschlußeigenschaft)*
4. *Wenn* $X \vdash A$*, so existiert eine endliche Teilmenge* $X_e \subseteq X$ *mit* $X_e \vdash A$ *(Endlichkeitssatz)*

Die Folgerungsbeziehung stellt damit eine Art Deduktionsrelation dar. Der Operator $cl^{\vdash}$ mit $cl^{\vdash}(X) = \{A | X \vdash A\}$ ist ein Hüllenoperator, der Endlichkeitseigenschaft hat.

Def 2.19 *Gegeben sei ein Deduktionssystem* $(Fm, \vdash)$*.* X *heißt*

1. konsistent*, wenn* $X \nvdash A$ *für wenigestens eine Formel* $A \in Fm$ *(d. h.* $cl^{\vdash}(X) \neq Fm$*).*
2. maximal*, falls* X *konsistent ist, aber keine echte Obermenge von* X *konsistent ist.*
3. deduktiv *abgeschlossen, wenn* $cl^{\vdash}(X) = X$*.*
4. A-konsistent*, wenn* $X \nvdash A$*.*
5. A-maximal*, wenn* $X \nvdash A$ *und aus jeder echten Obermenge ist* A *ableitbar.*

Satz 2.17 (Lindenbaum**)** *Ist* X *A-konsistent, so existiert eine A-maximale Erweiterung von* X*.*

Beweis: X sei A-konsistent, d. h. $X \nvdash A$. Sei $\Omega(X) = \{Y | Y \supseteq X, Y \subseteq Fm, Y \nvDash A\}$. Dann ist $(\Omega, \subseteq)$ eine partielle Ordnung.
Sei $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$ so beschaffen, daß $X_0 = X$, $X_i \in \Omega(X)$. Dann besitzt diese Folge $\{X_i / i < \omega\}$ eine obere Schranke in $\Omega(X)$.
Sei $X^* = \bigcup_{i<\omega} X_i$. Zu zeigen, $X^* \in \Omega(X)$, d. h. $X^* \nvdash A$.
Angenommen, $X^* \vDash A$. Nach dem Endlichkeitssatz existiert eine endliche Teilmenge $X_e \subseteq X^*$, so daß $X_e \vdash A$. Dann existiert eine Zahl j, so daß $X_e \subseteq X_j$. Da $X_e \vdash A$ folgt wegen der Monotonie von $\vdash$: $X_j \vdash A$ Widerspruch

□

Bemerkung: Die Existenz maximaler Mengen gilt nicht für beliebige Deduktionssysteme. Der Satz 2.17 gilt, falls eine endliche Menge X existiert, so daß $X^{\vdash} = Fm$, d.h. , wenn sich alle Formeln aus einer endlichen Teilmenge ableiten lassen.

Def 2.20 (Schlußregel)

Eine n-stellige Schlußregel $(n \geq 0)$ *ist eine* $(n+1)$*-stellige Relation* $R \subseteq (Fm(AK))^{n+1}$. *Jedes zu* R *gehörende Tupel* $(A_1, \ldots, A_n, A_0)$ *heißt von* R *auf die Prämissen* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *mit der Konklusion* A_0. *Eine n-stellige Schlußregel* R *heißt korrekt, wenn für beliebige Mengen* $X \subseteq Fm(AK)$ *und* $(A_1, \ldots, A_n, A_0)$ *aus der Beziehung* $X \models A_1, \ldots, A_n$ *die Bedingung* $X \models A_0$ *folgt.*

Bemerkung: Eine 0-stellige Schlußregel ist eine Menge von Formeln.

Zu jeder Menge Δ von Schlußregeln, genannt *relationales Regelsystem*, läßt sich eine Relation $\vdash_\Delta \subseteq \text{Pow}(Fm) \times Fm$ festlegen.
$X^{\vdash_\Delta}$ ist die kleinste Menge aller Formeln, die X enthält und abgeschlossen ist bezüglich der folgenden Bedingung:

> Wenn $(A_1, \ldots, A_n, A_0) \in R$ und $R \in \Delta$, $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq X^{\vdash_\Delta}$, dann $A_0 \in X^{\vdash_\Delta}$ (d. h. $X^{\vdash_\Delta}$ ist Hülle von X bezüglich der Ableitungsrelation $\vdash_\Delta$).

$(Fm(AK), \vdash_\Delta)$ heißt *Ableitungssystem.*

Beispiel: (Modus Ponens)

$$\begin{array}{l} A \\ A \to B \\ \hline B \end{array}$$

ist eine übliche Schreibweise für die Relation

$$Mp = \{(A, A \to B, B) / A, B \in Fm\}$$

Satz 2.18 *1. Für jede Menge* Δ *von Relationen über Fm(AK) ist* $(Fm, \vdash_\Delta)$ *ein Deduktionssystem.*

2. Jedes Deduktionssystem $(Fm, \vdash)$ *ist als Ableitungssystem darstellbar.*

Def 2.21

1. *Ein Ableitungssystem* $(Fm, \vdash_\Delta)$ *heißt* rekursiv axiomatisierbar, *wenn entscheidbar ist, ob ein* $(n+1)$*-Tupel zu einer Relation aus* R *gehört.*

2. $(Fm, \vdash_\Delta)$ *heißt* finit-rekursiv, *falls* Δ *endlich ist und jede in* Δ *enthaltene Relation* $R \in \Delta$ *entscheidbar ist.*

3. $(Fm, \vdash_\Delta)$ *heißt* rekursiv aufzählbar axiomatisierbar, *wenn die Menge* $\bigcup \Delta$ *rekursiv aufzählbar ist.*

Beispiel: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik, $|P| < \omega$, $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$. Sei $(\alpha, \beta) \in P$: $w \Rightarrow v$, wenn $w = w_1 \alpha w_2$, $v = w_1 \beta w_2$.
Somit erhalten wir eine binäre Ableitungsrelation

$$R_{\alpha,\beta} = \{(w, v)/w \Rightarrow v\}$$

Satz 2.19 *Ist* $(Fm, \vdash)$ *ein rekursiv axiomatisierbares Ableitungssystem und* X *eine rekursiv aufzählbare Menge von Formeln, dann ist auch die Menge* $X^\vdash = \{A | X \vdash A\}$ *rekursiv aufzählbar.*

Beispiele aussagenlogischer Schlußweisen.

2.6 Der Vollständigkeitssatz

PROBLEM: Gesucht ist ein Regelsystem Δ, so daß gilt:

$$X \vdash_\Delta A \iff X \models A$$

Es ist also ein formales Ableitungssystem zu konstruieren, das dem Folgerungsbegriff des inhaltlichen Schließens entspricht.

Lösung:

1. 0-stellige Regeln (Axiome): $Ax(AK)$ $\big[\subseteq Fm(AK)\big]$,

2. $\{Mp\} = \Delta$ (Modus Ponens bildet die Menge von Schlußregeln).

Notwendige Bedingung: $\emptyset \vDash Ax(AK)$.

Das Axiomensystem $Ax_H(AK)$ von HILBERT

1. $A \to (B \to A)$ (Prämissenbelastung)

2. $\big(A \to (A \to B)\big) \to (A \to B)$

3. $(A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$ (Kettenschluß)

4. $A \wedge B \to A$

5. $A \wedge B \to B$
6. $(A \to B) \to \big((A \to C) \to (A \to B \wedge C)\big)$
7. $A \to A \vee B$
8. $B \to A \vee B$
9. $(A \to C) \to \big((B \to C) \to (A \vee B \to C)\big)$
10. $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$
11. $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$
12. $(A \to B) \to \big((B \to A) \to (A \leftrightarrow B)\big)$
13. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (Kontraposition)
14. $A \to \neg\neg A$
15. $\neg\neg A \to A$

Bemerkung: Alle Formeln aus $Ax_H(AK)$ sind allgemeingültig (dies ist notwendige Voraussetzung für Schlußregeln).

Die Schlußregeln des Modus Ponens bezeichnet man als *Abtrennung*, symbolisch $\vDash_a = \{(A, A \to B, B) \,/\, A, B \in Fm\}$

Def 2.22

$$X \vdash A \iff_{df} X \cup Ax(AK) \vdash_a A$$

(Eine Formel A ist aus einer Formelmenge X $\vdash$-ableitbar *genau dann, wenn A aus $X \cup Ax(AK)$ nur mittels $\vdash_a$ ableitbar ist.)*

- Eine Menge X heißt *semantisch konsistent*, wenn $M(X) \neq \emptyset$.
- X heißt *syntaktisch konsistent*, wenn $X^{\vdash} = \{A | X \vdash A\} \neq Fm(AK)$.
- X heißt *klassisch konsistent*, wenn keine Formel A existiert mit $X \vdash A, \neg A$ (keine ableitbaren Widersprüche).

Lemma 2.1 *Aus $Ax_H(AK)$ sind mittels $\vdash_a$ folgende Formeln ableitbar:*

1. $A \to A$
2. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$ *(Fregescher Kettenschluß oder Selbstdistributivität des Funktors $\to$)*
3. $(A \to B) \to \big(((A \to C) \to B) \to B\big)$

4. $\neg A \to (A \to B)$

5. $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

6. $A \to (B \to A)(Prämissenbelastung)$.

Satz 2.20 *Eine Menge X von Formeln ist syntaktisch konsistent genau dann, wenn sie klassisch konsistent ist.*

Beweis:

($\leftarrow$) ist trivial

($\rightarrow$) Sei X syntaktisch konsistent. Zu zeigen ist, X ist klassisch konsistent. Angenommen, X sei klassisch *inkonsistent*, dann existiert eine Formel A mit $X \vdash A, \neg A$.
Hieraus folgt, daß aus X ableitbar ist $X \vDash (A \wedge \neg A)$. Ferner gilt: $Ax(AK) \vdash_a (A \wedge \neg A) \to B$ für jede Formel B $\curvearrowright$ $X \vdash B$; da B beliebig $\curvearrowright$ $X^{\vdash} = Fm(AK)$. Widerspruch.

□

Satz 2.21 (Korrektheitssatz) *Wenn $X \vdash A$, so $X \vDash A$.*

Beweisskizze: (induktiv über die Stufe der Ableitung)
Für alle $n \in \omega$ gilt: $X \vdash^n A$, so $X \models A$.

$n = 0$*:* $X \vdash^0 A \iff A \in X \cup Ax(AK)$ $\curvearrowright$ $X \vDash A$.

$n + 1$*:* Aus $X \vdash^{n+1} B$ folgt $\exists A$ mit $X \vdash^n (A \to B)$, $X \vdash^n A$ und nach Induktionsvoraussetzung $X \vDash A \to B, A$ $\curvearrowright$ $X \vDash B$.□

Satz 2.22 (Deduktionstheorem für das Ableiten)
Für jede Menge X von Formeln, $A, B \in Fm(AK)$ gilt:

$$\textit{Wenn } X \cup \{A\} \vdash B, \textit{ so } X \vdash (A \to B)$$

Beweis: (induktiv über die Ableitungsstufe)
Wenn $X \cup \{A\} \vdash^0 B$, so $X \cup \{A\} \cup Ax(AK) \vdash^0_a B$ $\curvearrowright$ $B \in X \cup \{A\} \cup Ax(AK)$. Fallunterscheidung:

1. Wenn $B := A$, so $X \vdash A \to A$, wegen $Ax(AK) \vdash_a A \to A$.

2. Sei $B \in X \cup Ax(AK)$. Allgemein gilt $Ax(AK) \vdash B \to (A \to B)$ (Prämissenbelastung) $\curvearrowright$ $X \vdash A \to B$.

Induktionsschritt: sei $X \cup \{A\} \vdash^{n+1} B$. Dann existiert eine Formel C, so daß $X \cup \{A\} \vdash^n C$, $X \cup \{A\} \vdash^n (C \to B)$ (um B zu erhalten müssen wir einmal den Modus Ponens angewendet haben).
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $X \vDash (A \to C)$, $X \vDash (A \to (C \to B))$. Es ist aber wegen $Ax(AK)$ $X \vDash (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$ (Selbstdistributivität). Nach zweimaliger Anwendung des Modus Ponens folgt zunächst $X \vdash (A \to C) \to (A \to B)$ und dann unmittelbar $X \vdash A \to B$.$\square$

Satz 2.23 (Vollständigkeitssatz)

$$X \vdash A \iff X \models A$$

(D. h. Folgerungs- und Ableitbarkeitsbegriffe sind äquivalent.)

Beweis:

($\to$) folgt aus dem Korrektheitssatz

($\leftarrow$) Sei $X \vDash A$. Zu zeigen: $X \vdash A$.
Angenommen, $X \nvdash A$. Dann existiert eine Menge $Y \subseteq Fm(AK)$ mit $X \subseteq Y$, $Ax(AK) \subseteq Y$, so daß

1. $A \notin Y$,
2. $Y^{\vdash} = Y$,
3. Wenn $B \notin Y$, so $Y \cup \{B\} \vdash A$ (Maximalitätsbedinung).

Es genügt zu zeigen, daß Y vollständig ist. Dann existiert nämlich ein Modell f, $f \vdash Y$ mit $f \vdash \neg A$ $\curvearrowright$ Widerspruch zu $X \vDash A$.

1. Zu zeigen: $\neg B \in Y \iff B \notin Y$

   ($\to$) Sei $\neg B \in Y$. Angenommen, $B \in Y$. Da $Y^{\vdash} = Y$, so gilt $Ax(AK)^{\vdash} \subseteq Y$ und wegen $Ax(AK) \vdash \neg B \to (B \to A)$ ergibt nach zweimaliger Anwendung des modus ponens die Beziehung $Y \vdash A$, und damit $A \in Y$, Widerspruch zu $A \notin Y$.

   ($\leftarrow$) Sei $B \notin Y$. Dann gilt $Y \cup \{B\} \vdash A$ (Maximalität von Y). Nach dem Deduktionstheorem gilt: $Y \vdash (B \to A)$. Zu zeigen, $\neg B \in Y$.
   Angenommen, $\neg B \notin Y$, dann gilt $Y \vdash (\neg B \to A)$. Wegen $Ax(AK) \subseteq Y$ und $Y^{\vdash} \subseteq Y$ gilt:

   $$Y \vdash (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$$

   (Prinzip der Fallunterscheidung) $\curvearrowright$ $Y \vdash A$, Widerspruch.

2. Zu zeigen: $B \wedge C \in Y \iff \{B, C\} \subseteq Y$

   ($\to$) Sei $B \wedge C \in Y$ $\curvearrowright$ $\{B \wedge C \to B, B \wedge C \to C\} \subseteq Y$. Da Y deduktiv abgeschlossen ist, folgt $\{B, C\} \subseteq Y$ (Anwendung des Modus Ponens).

(←) Sei $\{B, C\} \subseteq Y$. Aus $Ax(AK)$ ist ableitbar $B \to (C \to (B \land C))$. Zweimalige Anwendung des Modus Ponens ergibt $B \land C \in Y$.

3. Zu zeigen: $B \lor C \in Y \iff \{B, C\} \cap Y \neq \emptyset$

   (→) Sei $B \lor C \in Y$. Angenommen, $\{B, C\} \cap Y = \emptyset$. Da Y maximal ist, folgt $Y \cup \{B\} \vdash A$, $Y \cup \{C\} \vdash A$. Nach dem Deduktionstheorem $Y \vdash B \to A$, $Y \vdash C \to A$.
   Aus $Ax(AK)$ ist ableitbar $(B \to A) \to ((C \to A) \to (B \lor C \to A)) \in Y$ $\curvearrowright Y \vDash B \lor C \to A \curvearrowright Y \vdash A$Widerspruch

   (←) trivial

4. (→) Sei $B \to C \in Y$ und $B \in Y$. Zu zeigen, $C \in Y$. Das ist der Fall, da $Y^{\vdash} = Y$.

   (←) Nun sei $B \notin Y$ oder $C \in Y$. Zu zeigen, $B \to C \in Y$. Fallunterscheidung:

   (a) Sei $B \notin Y$. Dann ist $Y \cup \{B\} \vdash A$ (folgt aus der Maximalität). Nach dem Deduktionstheorem $Y \vdash (B \to A)$.
   Angenommen, $B \to C \notin Y$, so aufgrund der Maximalität $Y \vdash (B \to C) \to A$. Es gilt aber: $Ax(AK) \vdash (B \to A) \to (((B \to C) \to A) \to A)$ $\curvearrowright$ (durch zweimalige Anwengung des Modus Ponens) $Y \vdash A$Widerspruch

   (b) Sei $C \in Y$. Es ist $C \to (B \to C) \in Y \curvearrowright B \to C \in Y\square$

Korollar 2.1 (Axiomatisierungstheorem)

$$A \in Ag \iff Ax(AK) \vdash_a A$$

Das zugrundegelegte Axiomensystem $Ax_H(AK)$ ist unendlich, da jedes Axiom ein unendliches Schema repräsentiert, denn die Zeichen A, B, C, D stehen für beliebige Formeln. Es läßt sich jedoch ein endliches Axiomensystem finden, welches eine vollständige Axiomatisierung erlaubt. Sei $ax_H(AK)$ dasjenige System, welches aus $Ax_H(AK)$ entsteht, indem die syntaktische Variable A durch die Aussagenvariable p, B durch q und C durch r erstetzt werden. Das entstehende System $ax_H(AK)$ ist endlich.

Sei nun $\vdash_e = \{(A, \theta(A)) | A \in Fm, \theta$ ist eine Substitution $\}$ die einstellige Schluregel der Einsetzung. Ferner sei $\vdash_1$ die Ableitungsrelation, die auf den Schlußregeln der Abtrennung und der Einsetzung beruht. Dann gelten folgende Sätze.

Satz 2.24 $F \in Ag \iff ax_H(AK) \vdash_1 F$.

Satz 2.25 $X \models F \iff (X \cup ax_H(AK)^{\vdash_1}) \vdash_a F$

Bemerkung: Die Einsetzungsregel darf nur auf logisch gültige Formeln angewandt werden, da die volle Einsetzungsregel nicht korrekt ist. Unter Verwendung der vollen Einsetzungregel $\vdash_e^*$ ergibt sich z.B. $\{p\} \vdash_e^* q$ (man ersetze p durch q), aber $\{p\} \not\models q$.

FRAGE: Kann man $Ax(AK)$ weiter reduzieren? Von J. LUKASIEWICZ wurde ein Axiomensystem mit 3 Formel entwickelt; MEREDITH fand ein einelementiges Axiomensystem ax_M:

$$\big(((p \to q) \to (\neg r \to \neg s)) \to t\big) \to \big((t \to p) \to (q \to p)\big),$$

so daß $ax_M^{\vdash} \supseteq Ax(AK)$.

2.7 Ergänzungen

2.7.1 Historische Bemerkungen

Die erste Formulierung der Aussagenlogik als strengen formalen Kalklül geht auf G. Frege zurück, [**?**]. Er legt folgendes Axiomensystem Ax_F zugrunde:

F1. $p \to (q \to p)$

F2. $(s \to (p \to q)) \to ((s \to p) \to (s \to q))$

F3. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

F4. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$

F5. $\neg\neg p \to p$

F6. $p \to \neg\neg p$

Folgende Definitionen werden verwendet.

D1. $p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$

D2. $p \vee q =_{df} \neg p \to q$

D3. $p \leftrightarrow q =_{df} \neg((p \to q) \to \neg(q \to p))$

J. Lukasiewicz vereinfachte das System Ax_F zu folgendem System Ax_L:

L1. $p \to (q \to p)$

L2. $(s \to (p \to q)) \to ((s \to p) \to (s \to q))$

L3. $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$.

Ferner werden folgende Definitionen verwendet:

d1. $p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$

d2. $p \vee q =_{df} \neg p \to q$

d3. $p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p)$

J. Lukasiewisz führte eine klammerfreie Präfixschreibweise für die aussagenlogischen Formeln ein. Der Funktor $\to$ wird hierbei durch C, der Funktor $\neg$ durch N, der Funktor $\wedge$ durch K, der Funktor $\vee$ durch A und der Funktor $\leftrightarrow$ durch E bezeichnet. Das Axiome L1,L2,L3 nehmen dann in der klammerfreien Präfixschreibweise die folgende Gestalt an:

L1. $CCpqCCqrCpr$

L2. $CCNpppp$

L3. $CpCNpq$

d1. $Kpq =_{df} NCpNq$

d2. $Apq =_{df} CNpq$

d3. $Epq =_{df} KCpqCqp$

Als Schlußregeln verwendet Lukasiewicz in [**?**] die Einsetzungsregel und die Abtrennungsregel. Die Kunst des Ableitens von Tautologien hat Lukasiewicz in [**?**] zur größten Vollendung gebracht. Wir skizzieren hier die Grundgedanken seines Aufbaus, um einen Eindruck von seiner Leistung zu geben. Um die Ableitungen übersichtlich zu gestalten, führt Lukasiewicz folgende Begriffe ein. Über jeder abzuleitenden Formel, die alle mit laufenden Nummern versehen sind and damit als bewiesen kenntlich sind, befindet sich eine nicht-numerierte Zeile, die Beweiszeile genannt wird. Jede Beweiszeile besteht aus zwei Teilen, die durch das Zeichen $*$ getrennt sind. Was vor und nach dem dem Zeichen $*$ steht bezeichnet dieselbe Formel, nur anders dargestellt. Vor dem $*$ ist die Einsetzung angegeben, die an der bereits gegebenen, durch eine Nummer gekennzeichnete Formel ausgeführt wird. Der rechts von $*$ stehende Ausdruck beschreibt, aus welche die Abtrennungsregel anzuwenden ist, wobei die hinter dem Zeichen $-$ stehende Formel abgetrennt wird.

Wir betrachten dieses Verfahren an einem Beispiel.

$F_1 : CpCqp$

$F_2 : CCpCqrCCpqCpr$

$$F_1[p/CCpCqrCCpqCpr, q/Cqr] * CF_2 - 1$$

1: $CCqrCCpCqrCCpqCpr$

$$F_2[p/Cqr, q/CpCqr, r/CCpqCpr] * C1 - 2$$

2: $CCCqrCpCqrCCqrCCqpCpr$

$$2 * CF_1[p/Cqr, q/Cqr, q/p] - 3$$

3: $CCqrCCpqCpr$

$$F_2[p/Cqr, q/Cpq, r/Cpr] * C3 - 4$$

4: $CCCqrCpqCCqrCpr$

$$F_1[p/CpCqp, q/r] * CF_1 - 5$$

5: $CrCpCqp$

$$4[q/Cpq, p/q] * C5[r/CCpqr, p/q, q/p] - 6$$

6: $CCCpqrCqr$

$$3[q/CCpqr, r/Cqr, p/s] * C6 - 7$$

7: $CCsCCpqrCsCqr$

$$7[s/CpCqr, r/Cpr] * CF_2 - 8$$

8: $CCpCqrCqCpr$

8 entspricht dem Axiom F3 des Fregeschen Systems.

Nach Frege war es B. Russell, der die Aussagenlogik als logischen Kalkül darstellte und weiter untersuchte. Die Systeme Ax_F und Ax_L orientieren auf eine möglichst ökonomische Darstellung. Das in der Definition **??** verwendete Axiomensystem verfolgt das Ziel, die Eigenschaften der verschiedenen Funktoren zu separieren. Es geht auf D. Hilbert, [**?**] zurück.

2.7.2 Fehlschlüsse

Die Behandlung von Fehlschlüssen kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen, und es gibt bislang keine allgemein akzeptierte Klassifikation. In der Logik wird dieser Terminus in einem ziemlich engen Sinn verwendet: ein Fehlschluß ist ein Typ einer unkorrekten Argumentation. Interessant sind solche Felschlüsse, die trotz ihrer Unkorrektheit psychologisch überzeugend wirken. Traditionell werden Fehlschlüsse in zwei große Gruppen unterteilt: in die formalen und die informalen Fehlschlüsse. Die informalen Fehlschlüsse haben ihre Ursache in der Ambiguität der natürlichen Sprache oder der mangelnden Sorgfalt in der Behandlung des diskutierten Gegenstands. Die informalen Fehlschlüsse werden in zwei Gruppen unterteilt: Die Fehlschlüsse der Relevanz und die Fehlschlüsse der Ambiguität.

A. Fehlschlüsse der Relevanz

Die Fehlschlüsse der Relevanz sind alle Fehlschlüsse, bei denen die Prämisse logisch irrelevant für die Begründung der Wahrheit der Konklusion ist.

1. *Argumentum ad Baculum* (Argument durch Drohung)

Dieser Fehlschluß liegt vor, wenn man das Akzeptieren einer Konklusion durch Gewalt oder Drohung erzwingt. Diese Art des Fehlschlusses wird in der Regel nur angwandt, wenn rationale Argumente veragen

2. *Argumentum ad hominem*

3. *Argumentum ad Ignorantiam*

4. *Argumentum ad Populum*

5. *Argumentum ad Verecundiam*

6. *Falsche Spezialisierung*

7. *Falsche Generalisierung*

8. *Petitio Principii*

9. *Komplexe Fragen*

10. *Ignoratio Elenchi*

B. Fehlschlüsse der Ambiguität

1. *Equivocation*

C. Formale Fehlschlüsse

2.7.3 Sequenzensysteme

Das für den Beweis des Vollständigkeitssatzes zugrundeglegte Ableitungssystem ist ein Frege-Hilbert-System. Wir skizzieren hier einige andere Systeme, eine ausführliche Darstellung bleibt einer Spezialvorlesung vorbehalten. Eine Zeichenreihe der Gestalt $F_1, \ldots, F_n$, $F_j \in Fm(AK)$, $1 \leq j \leq n$, heißt Folge. $F_\omega(AK)$ ist die Menge aller Folgen, die durch $\Gamma, \Pi, \Lambda \ldots$ bezeichnet werden. Die Ausdrücke des Sequenzenkalküls werden durch die folgende Menge $Seq = \{\Gamma \Rightarrow \Delta : \Gamma, \Delta \in F_\omega(AK)\}$ festgelegt; hierbei ist $\Rightarrow$ ein nicht in $Fm(AK)$ vorkommendes Zeichen. Für eine Folge $\Delta = F_1, \ldots, F_n$ von Formeln ist $\bigwedge \Delta$ die Formel $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ und $\bigvee \Delta$ die Formel $F_1 \vee \ldots \vee F_n$. Für eine Sequenz $S := \Gamma \Rightarrow \Delta$ ist $fm(S) = \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$. Γ heißt Antezedent (notiert ant(S)) und Δ heißt Sukzedent von S (notiert suk(S).

Sei X eine Menge von AK-Formeln und $Erf(X) = \{f : f \quad \text{ist eine Belegung} \quad Var \rightarrow \{0,1\} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A} \models_f X\}$. Sequenzen $S := A_1, \ldots, A_m \Rightarrow B_1, \ldots B_n$ werden wie folgt gedeutet. Für eine Belegung f ist: $f \models A_1, \ldots, A_m \Rightarrow B_1, \ldots B_n$ genau dann, wenn $f \models \{A_1, \ldots, A_m\}$ impliziert $f \models \bigvee_{1 \leq j \leq n} B_j$. In diesem Falle heißt f ein Modell der Sequenz S. Mit $Mod(S)$ wird die Klasse aller Modelle der Menge $\mathcal{S}$ von Sequenzen bezeichnet. Ferner ist $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, wenn für alle f die Beziehung $f \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ gilt; dann heißt die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *logisch gültig*. Offensichtlich sind folgende Bedingungen äquivalent: (1) $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, (2) $\models \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.

Def 2.23 *$\mathcal{S}$ sei eine Menge von Sequenzen. Dann sei $\mathcal{S} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ gdw. $Mod(\mathcal{S}) \subseteq Mod(\{\Gamma \Rightarrow \Delta\})$.*

Satz 2.26 *1. Für eine Menge $\mathcal{S}$ von Sequenzen und $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gilt $\mathcal{S} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ genau dann, wenn $\{fm(S) : S \in \mathcal{S}\} \models \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.*

2. Für eine Menge von Formeln $X \subseteq L(\Sigma)$, $F \in L(\Sigma)$ gilt:
$X \models F$ genau dann, wenn $\{\Rightarrow G / G \in X\} \models \quad \Rightarrow F$.

Ziel der Sequenzenkalküle ist eine formale, axiomatische Charakterisierung der logisch gültigen Sequenzen bzw. der Sequenzen, die aus einer Menge von Formeln folgen. Wir definieren einen Kalkül LK, die eine elementare Grundlage für die formale Manipulation von Sequenzen bilden.

Def 2.24 *1. Eine n-stelligen Sequenzenregel R ist eine (n+1) -stellige entscheidbare Relation $R \subseteq Seq(PK)^{n+1}$. Jedes zu R gehörende (n+1)-Tupel $(S_1, \ldots, S_n, S_0)$ heißt Anwendung von R auf die Prämissen $S_1, \ldots, S_n$ mit der Konklusion S_0. Wir schreiben dann $\dfrac{S_1, \ldots, S_n}{S_0}$. $S_1, \ldots, S_n$ heißen Obersequenzen und S_0 heißt Untersequenz. 0-stellige Sequenzenregeln heißen Axiome oder Anfangssequenzen.*

2. Ein Sequenzensystem $\mathcal{C} = (L_s, R_1, \ldots, R_n)$ ist definiert durch eine Menge $L_s \subseteq Seq$ und durch Sequenzenregeln $R_1, \ldots, R_n$, die in L_s definiert sind.

3. *Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von Belegungen. Eine n-stellige Sequenzenregel R heißt $\mathcal{K}$-korrekt (oder korrekt für $\mathcal{K}$) , wenn aus $(S_1, \ldots, S_n, S_0) \in R$ die Beziehung $Mod(\{S_1, \ldots, S_n\}) \cap \mathcal{K} \subseteq Mod(S_0)$ folgt. R heißt logisch korrekt (oder klassisch korrekt), wenn R korrekt ist für 2^{Var}. er Kalkül $\mathcal{C}$ heißt logisch korrekt, wenn jede Regel in $\mathcal{C}$ logisch korrekt ist.*

4. *Sei $\mathcal{C} = (L_s, R_1, \ldots, R_n)$ ein Sequenzenkalkül und $X \subseteq Fm(\Sigma)$. Dann entsteht $\mathcal{C}(X)$ aus $\mathcal{C}$, indem zusätzlich folgende Sequenzen als Anfangssequenzen oder Axiome zugelassen werden: $\{\Rightarrow F : F \in X\}$. Analog wird der Kalkül $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ für Mengen $\mathcal{S}$ von Sequenzen definiert.*

Def 2.25 *(Kalkül LK)*

1. *Anfangssequenzen (Axiome): $A \Rightarrow A$, A eine beliebige Formel.*

2. *Strukturregeln*

   (a) *Verdünnung*

   $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Theta}{C, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (T:l) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Theta, C}\ (T:r)$$

   (b) *Kontraktion*

   $$\frac{C, C, \Gamma \Rightarrow \Theta}{C, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (C:l) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, C, C}{\Gamma \Rightarrow \Theta, C}\ (C:r)$$

   (c) *Umordnung*

   $$\frac{\Delta, C, D, \Gamma \Rightarrow \Theta}{\Delta, D, C, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (I:l) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Omega, C, D, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Omega, D, C, \Theta}\ (I:r)$$

3. *Schnittregel*

   $$\frac{\Delta \Rightarrow \Omega, C \qquad C, \Gamma \Rightarrow \Theta}{\Delta, \Gamma \Rightarrow \Omega, \Theta}\ (Cut)$$

4. *Aussagenlogische Regeln*

   (a) *Konjunktionsregeln*

   $$\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Theta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (\wedge : l_1) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Theta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (\wedge : l_2)$$

   $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Theta, B}{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \wedge B}\ (\wedge : r)$$

   (b) *Disjunktionsregeln*

   $$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Theta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (\vee : l)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, A}{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \vee B}\ (\vee : r_1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, B}{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \vee B}\ (\vee : r_2)$$

(c) *Implikationsregeln*

$$\frac{\Sigma \Rightarrow \Omega, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Theta}{A \to B, \Sigma, \Gamma \Rightarrow \Omega, \Theta}\ (\to: l) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Theta, B}{\Gamma \Rightarrow \Theta, A \to B}\ (\to: r)$$

(d) *Negationsregeln*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Theta}\ (\neg : l) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Theta, \neg A}\ (\neg : r)$$

Die Prämissen einer Regel heißen *Obersequenzen* der Regel, die Konklusion heißt *Untersequenz*. Die in der Untersequenz neu entstehende Formel heißt *Hauptformel*; die Formeln der Obersequenz, die für die Konstruktion der Hauptformel verwendet werden, heißen *Seitenformeln*; alle übrigen Formeln heißen *Nebenformeln*.

Def 2.26 *Für eine Menge X von Formeln und einen Sequenzenkalkül $\mathcal{C}$ entsteht der Kalkül $\mathcal{C}(X)$ aus $\mathcal{C}$, indem zusätzlich folgende Sequenzen als Anfangssequenzen zugelassen werden $\{\Rightarrow F : F \in X\}$. Analog wird der Kalkül $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ für Mengen $\mathcal{S}$ von Sequenzen definiert.*

Satz 2.27 *Der Kalkül LK ist logisch korrekt.*

Beweis: Als Beispiel sei die Korrektheit der Regel $(\vee : l)$ gezeigt. Hierzu ist die folgende Beziehung zu zeigen: $\{A, \Gamma \Rightarrow \Theta; B, \Gamma \Rightarrow \Theta\} \models A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Theta$. Sei $\mathcal{A} \models_\nu A \vee B, \Gamma$. Wenn $\mathcal{A} \models_\nu A$, so folgt nach Voraussetzung $\mathcal{A} \models_\nu \bigvee \Theta$. Das gleiche trifft zu, wenn die Bedingung $\mathcal{A} \models_\nu B$ gilt. □

Def 2.27 *$\mathcal{C} = (L_s, R_0, R_1, \ldots, R_n)$ sei ein Sequenzenkalkül mit den m_i-stelligen Schlußregeln R_i, $1 \le i \le n$. Ein Beweisdiagramm $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ ist ein bewerteter Baum $\mathcal{D} = (U, 0, \le, val, r)$ mit folgenden Eigenschaften.*

1. *val ist eine Funktion, die jedem Knoten eine Sequenz zuordnet, und die Funktion r ordnet jedem Knoten eine Schlußregel zu.*
2. *für jedes Blatt $a \in U$ ist $val(a)$ eine Anfangssequenz (Axiom) von $\mathcal{C}$, und $r(a) = R_0$ (die Schlußregel R_0 ist $0-$ stellig und charakterisiert die Axiome).*
3. *Wenn $a \in U$ kein Blattknoten ist, so existiert eine Zahl i, $1 \le i \le n$, und unmittelbare Vorgänger $b_1, \ldots, b_{n_i}$ von a, so daß sich $val(a)$ durch durch Anwendung der Schlußregel R_i auf $val(b_1), \ldots, val(b_{n_i})$ ergibt. Dann ist $r(a) = R_i$.*

4. *Eine Sequenz S ist ableitbar in $\mathcal{C}$, notiert $\vdash_{\mathcal{C}} S$, wenn ein Beweisdiagramm $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ existiert, dessen Wurzel mit S bewertet ist. Für eine Sequenzenmenge $\mathcal{S}$ sei $\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{C}} S$, wenn $\vdash_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} S$. Jedem Kalkül $\mathcal{C}$ läßt sich ein Hüllenoperator $Cl^{\mathcal{C}}$: $Pow(Seq) \to Pow(Seq)$ zuordnen, der durch folgende Beziehung definiert ist: $Cl^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) = \{S : \vdash_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} S\}$.*

5. *$\mathcal{C}$ ist korrekt, wenn für jede Menge $\mathcal{S} \subseteq L_s, S \in L_s$ gilt: wenn $\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{S}} S$, so $\mathcal{S} \models S$. $\mathcal{C}$ ist vollständig, wenn für jede Menge $\mathcal{S} \subseteq L_s$ und $S \in L_s$ gilt $\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{C}} S$ gdw. $\mathcal{S} \models S$. $\mathcal{C}$ ist schwach vollständig, wenn $\vdash_{\mathcal{C}} S$ gdw. $\models S$ für alle $S \in L_s$. $\mathcal{C}$ ist $\mathcal{S}-$vollständig, wenn für alle $S \in L_s$ gilt: $\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{C}} S$ gdw. $\mathcal{S} \models S$.*

Wir stellen einige wichtige Struktureigenschaften von Beweisdiagrammen zusammen. Ein *Zweig* eines Diagramms $\mathcal{D} = (U, 0, \leq, val)$ ist eine maximale Teilmenge $U_1 \subseteq U$, die bezüglich $\leq$ linear geordnet ist. Für $u \in U$ bezeichnet $\mathcal{F}(u)$ das durch die Menge $\mathcal{F}(u) = \{v : u \leq v\}$ definierte Teildiagramm. $Z(u) = \{v : v \leq u\}$ ist eine linear geordnete Teilmenge von $U(\mathcal{D})$ mit u als größtem Element. Die Länge eines Zweiges Z, $lh(Z)$, ist die Anzahl der in Z enthaltenden Knoten. $ZW(\mathcal{D})$ ist die Menge der in $\mathcal{D}$ enthaltenden Zweige und die Höhe von $\mathcal{D}$, notiert durch $h(\mathcal{D})$, ist definiert durch $h(\mathcal{D}) = max\{lh(Z) : Z \in ZW(\mathcal{D})\}$.

Def 2.28 1. *Eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist LK-ableitbar aus einer Menge $\mathcal{S}$ von Sequenzen, notiert $\mathcal{S} \vdash_{LK} \Gamma \Rightarrow \Delta$, wenn $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in $LK(\mathcal{S})$ ableitbar ist. Ebenso ist eine Formel F LK-ableitbar aus der Formelmenge X, wenn die Sequenz $\Rightarrow F$ in $LK(X)$ ableitbar ist.*

2. *Eine Sequenz $S := \Gamma \Rightarrow \Delta$ ist aus der Formelmenge X in LK ableitbar, notiert $X \vdash^{LK} F$, wenn eine endliche Folge $X_0 \subseteq X$ existiert, so daß $X_0, \Gamma \Rightarrow \Delta$ in LK ableitbar ist.*

3. *Eine Menge $\mathcal{S}$ von Sequenzen heißt LK-inkonsistent, wenn $\mathcal{S} \vdash_{LK} \Rightarrow$. Ebenso heißt eine Menge X von Formeln LK-inkonsistent, wenn $\{\Rightarrow F : F \in X\} \vdash_{LK} \Rightarrow$*

4. *Eine Formelmenge X ist inkonsistent in LK, wenn die leere Sequenz $\Rightarrow$ aus X in LK ableitbar ist.*

Wir betrachten einige Beispiele von Ableitungen.

1. $\vdash_{LK} \Rightarrow A \vee \neg A$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}}{\Rightarrow A, A \vee \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A, A}}{\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A}$$

2. $\vdash_{LK} \Rightarrow A \to (B \to A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}}{A \Rightarrow B \to A}}{\Rightarrow A \to (B \to A)}$$

3. $\{F, \Gamma \Rightarrow \Delta\} \vdash_{LK} \neg\neg F, \Gamma \Rightarrow \Delta$

$$\dfrac{\dfrac{F, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg F}\ (\neg : r)}{\neg\neg F, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg : l)$$

4. $\{\neg\neg F, \Gamma \Rightarrow \Delta\} \vdash_{LK} F, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \Rightarrow F}{F, \neg F \Rightarrow}}{F \Rightarrow \neg\neg F} \qquad \neg\neg F, \Gamma \Rightarrow \Delta}{F, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Satz 2.28 *(Korrektheitssatz) Für Mengen $\mathcal{S}$ von Sequenzen und Sequenzen $S := \Gamma \Rightarrow \Delta$ gilt: Wenn $\mathcal{S} \vdash_{LK} S$, so $\mathcal{S} \models S$.*

Satz 2.29 *X sei eine Menge von Formeln. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.*

1. *X ist inkonsistent in LK.*
2. *Jede Formel ist aus X in LK ableitbar.*
3. *Es gibt eine Formel F, so daß aus X sowohl F als auch $\neg F$ in LK ableitbar sind.*

Satz 2.30 *X sei eine Menge von Aussagen. Die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist ableitbar in $LK(X)$ genau dann, wenn $\Gamma \Rightarrow \Delta$ aus X LK-ableitbar ist.*

Beweis.

1. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ sei aus $LK(X)$ ableitbar. Dann existiert ein Beweisdiagramm $\mathcal{D}$ mit Anfangssequenzen aus $\{\Rightarrow F : F \in X\} \cup \{A \Rightarrow A : A \in Fm\}$ und der Endsequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Sei $X_0 = \{F :\Rightarrow F\ ist\ Anfangssequenz\ in\ \mathcal{D}\}$. Da die Ableitungsrelation $\vdash_L K$ stabil für Aussagen ist, folgt
$\{X_0 \Rightarrow F_1, \ldots, X_0 \Rightarrow F_n\} \vdash_{LK} X_0, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Durch mehrmalige Anwendung der Verdünnungsregel erhält man $F_i \Rightarrow F_i \vdash_{LK} X_0, F_i$. Hieraus folgt schließlich $\vdash_{LK} X_0, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

2. Es sei $X_0 \subseteq X$ eine endliche Teilmenge mit $\vdash_{LK} X_0, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Durch mehrfache Anwendung der Schnittregel läßt sich dann die Beziehung $\vdash_{LK(X)} \Gamma \Rightarrow \Delta$ zeigen.

In diesem Abschnitt wird die ableitungstheoretische Äquivalenz der Kalküle LK und des in Abschnitt beschriebenen 2.6 Kalküls gezeigt. Kalküle dieses Typs heißen Frege-Hilbert-Kalküle (kurz FH-Kalküle). Der in Abschnitt 6 bewiesene Vollständigkeitssatz läßt sich dann benutzen, um auch die Vollständigkeit des Kalküls LK zu erhalten.

Zunächst soll die Frage untersucht werden, wann zwei Sequenzenkalküle als äquivalent anzusehen sind. Gegeben seien zwei Sequenzenkalküle $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ mit den Regelsystemen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$.

Def 2.29 *1. Der Kalkül $\mathcal{C}1$ ist in dem Kalkül $\mathcal{C}2$ definierbar, notiert $\mathcal{C}1 \leq \mathcal{C}2$, wenn für jede Schlußregel $R \in \mathcal{R}_1$ und $(S_1, \ldots, S_n, S_0) \in R$ die Beziehung $\{S_1, \ldots, S_n\} \vdash_{\mathcal{C}2} S_0$ gilt. $\mathcal{C}1 \sim \mathcal{C}2$ gdw. $\mathcal{C}1 \leq \mathcal{C}2$ und $\mathcal{C}2 \leq \mathcal{C}1$.*

2. *$\mathcal{C}1$ ist schwach definierbar in $\mathcal{C}2$, $\mathcal{C}1 \leq_w \mathcal{C}2$, wenn für jede Schlußregel $R \in \mathcal{R}_1$ und $(S_1, \ldots, S_n, S_0) \in R$ aus $\vdash_{\mathcal{C}2} S_1, \ldots, S_n$ folgt $\vdash_{\mathcal{C}2} S_0$. $\mathcal{C}1$ ist in $\mathcal{C}2$ definierbar bezüglich der Menge $\mathcal{S} \subseteq Seq$, notiert $\mathcal{C}1 \leq_{\mathcal{S}} \mathcal{C}2$, wenn aus $(S_1, \ldots, S_n, S_0) \in R \in \mathcal{R}_1$ und $\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{C}2} S_1, \ldots, S_n$ folgt $\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{C}2} S_0$. Analog sind die Relationen $\sim_w$ und $\sim_{\mathcal{S}}$ definiert.*

3. *Der Kalkül $\mathcal{C}1$ ist interpretierbar in $\mathcal{C}2$, wenn eine rekursive Funktion $\phi : L(\mathcal{C}1) \to L(\mathcal{C}2)$ existiert, so daß für jede Menge $X \subseteq L(\mathcal{C}1)$ und $S \in L(\mathcal{C}1)$ gilt: $X \vdash_{\mathcal{C}1} S$ gdw. $\{\phi(F) : F \in X\} \vdash_{\mathcal{C}2} \phi(S)$.*

Sei $cl^{\mathcal{C}}$ der Hüllenoperator, der dem Kalkül $\mathcal{C}$ zugeordnet ist. Offensichtlich gilt: wenn $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2$, so $cl^{\mathcal{C}1} = cl^{\mathcal{C}2}$.

Satz 2.31 *$\mathcal{C}1, \mathcal{C}2$ seien Kalküle.*
1. Wenn $\mathcal{C}1 \sim \mathcal{C}2$, so $Cl^{\mathcal{C}1}(X) = Cl^{\mathcal{C}2}(X)$ für jede Menge $X \subseteq L_1$.
2. Wenn $\mathcal{C}1 \leq \mathcal{C}2$, so $\mathcal{C}1 \leq_w \mathcal{C}2$.
3. Wenn $\mathcal{C}1 \sim_w \mathcal{C}2$, so $Cl^{\mathcal{C}1}(\emptyset) = Cl^{\mathcal{C}2}(\emptyset)$, und analog, wenn $\mathcal{C}1 \sim_{\mathcal{S}} \mathcal{C}2$, so $Cl^{\mathcal{C}1}(\mathcal{S}) = Cl^{\mathcal{C}2}(\mathcal{S})$.

Satz 2.32 *Für vollständige und korrekte Kalküle $\mathcal{C}1, \mathcal{C}2$ gilt: $\mathcal{C}1 \sim \mathcal{C}2$.*

Satz 2.33 *(Lemma) Für Sequenzen $S_1, \ldots, S_k, S$ existiert eine Sequenz $Sq(S_1, \ldots, S_k, S)$, so daß gilt:*
$\{S_1, \ldots, S_k\} \vdash_{LK} S$ gdw. $\vdash_{LK} Sq(S_1, \ldots, S_k, S)$.

Beweis : Die folgende Sequenz erfüllt die gewünschten Bedingungen:
$Sq(S_1, \ldots, S_n, S) = fm(S_1), \ldots, fm(S_n) \Rightarrow fm(S).\Box$

Satz 2.34 *(Lemma) Sei $\vdash_{LK} S$ für eine Sequenz S. Dann existiert ein LK-Beweis für S, bei dem alle Anfangssequenzen atomar sind. Eine Sequenz $F \Rightarrow F$ heißt atomar, wenn F eine atomare Formel ist.*

Beweis: Sei LK_1 der Kalkül, der aus LK entsteht, indem nur Axiome der Gestalt $F \Rightarrow F$, F atomar, zugelassen sind. Offensichtlich gilt $LK_1 \leq LK$. Es genügt, daß jede Sequenz $F \Rightarrow F$ in LK_1 ableitbar ist. Der Beweis erfolgt induktiv über den Aufbau von F. Wenn F atomar ist, so ist nichts zu zeigen.
(1) Sei $A = B \wedge C$. Dann existieren Beweise $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ für B bzw. C in LK_1. Der Beweis von A in LK_1 ergibt sich durch folgendes Diagramm:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{E}_1\\ | \\ B \Rightarrow B\end{matrix}}{B \wedge C \Rightarrow B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{E}_2\\ | \\ C \Rightarrow C\end{matrix}}{B \wedge C \Rightarrow C}}{B \wedge C \Rightarrow B \wedge C}$$

(2) Wenn $A := B \vee C$, so erfolgt der Beweis analog.

(3) Der Fall $A := \neg B$ ist klar.

(4) Sei $A := B \to C$. $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ seien Beweise in LK_1 für $B \Rightarrow B$ bzw. $C \Rightarrow C$. Der gewünschte Beweis ergibt sich dann aus folgendem Diagramm:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{E}_1\\ | \\ B \Rightarrow B\end{matrix}}{B \Rightarrow B, C}}{\Rightarrow B, B \to C}}{\Rightarrow B \to C, B} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{E}_2\\ | \\ | \\ C \Rightarrow C\end{matrix}}{C, B \Rightarrow C}}{C \Rightarrow B \to C}}{B \to C \Rightarrow B \to C, B \to C}}{B \to C \Rightarrow B \to C}$$

□

Satz 2.35 *(Lemma) A, B seien Formeln. Dann gilt:*
(1) $\{A \Rightarrow B\} \vdash_{LK} \Rightarrow A \to B$;
(2) $\{\Rightarrow A \to B\} \vdash_{LK} A \Rightarrow B$.

Beweis :
(1) folgt aus der Regel $(\to: r)$.
(2) Der Beweis ergibt sich aus folgendem Ableitungsbaum:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow A \to B \qquad \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow B, A} \qquad B \Rightarrow B \quad (T:r)}{A \to B, A \Rightarrow B, B} \ (\to: l)}{A \Rightarrow B, B} \ (cut)}{A \Rightarrow B \quad (C:r)}$$

□

Satz 2.36 *(Lemma) Sei $F \in Ax(AK)$, dann gilt $\vdash_{LK} \Rightarrow F$.*

Beweis (Auswahl an Formeln).
(1) Sei $F := ((A \to B) \to A) \to A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{(A \to B) \to A, A \Rightarrow A}\,(T:l)}{(A \to B) \to A, A \Rightarrow A, B}\,(T:r)}{(A \to B) \to A \Rightarrow A, A \to B}\,(\to: r) \qquad A \Rightarrow A}{(A \to B) \to A, (A \to B) \to A \Rightarrow A, A}\,(\to: l)}{(A \to B) \to A, (A \to B) \to A \Rightarrow A}\,(C:r)}{(A \to B) \to A \Rightarrow A}\,(C:l)}{\Rightarrow ((A \to B) \to A) \to A}\,(\to: r)}{}$$

(3) $F := (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad \dfrac{B \Rightarrow B \qquad C \Rightarrow C}{B \to C, B \to C}\,(\to: l)}{A \to B, B \to C, A \Rightarrow C}\,(\to: l)}{A \to B, B \to C \Rightarrow A \to C}}{A \to B \Rightarrow (B \to C) \to (A \to C)}}{\Rightarrow (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))}$$

(4): $F := A \wedge \neg A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}}{A \wedge \neg A, A \Rightarrow}}{A \wedge \neg A, A \wedge \neg A \Rightarrow}}{A \wedge \neg A \Rightarrow}}{A \wedge \neg A \Rightarrow B}}{\Rightarrow (A \wedge \neg A) \to B}$$

(5) $F := B \to (A \vee \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A, \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A}}{B \Rightarrow A \vee \neg A}}{\Rightarrow B \to (A \vee \neg A)}$$

Satz 2.37 *(Äquivalenzlemma) $\mathcal{S}$ sei eine Menge von Sequenzen, S eine Sequenz. Dann gilt: $\mathcal{S} \vdash_{LK} S$ gdw. $\{fm(S) : S \in \mathcal{S}\} \vdash_{FH} fm(S)$.*

Satz 2.38 *(Vollständigkeitssatz) S sei eine Sequenz und $\mathcal{S} \subseteq Seq(\Sigma)$. Dann gilt $\mathcal{S} \vdash_{LK} S$ gdw. $\mathcal{S} \models S$.*

Die Richtung ($\rightarrow$) ist klar.
($\leftarrow$) Sei $\mathcal{S} \models S$. Wir zeigen, daß $\mathcal{S} \vdash_{LK} S$ gilt. Angenommen, es gilt $\{fm(S)/S \in \mathcal{S}\} \not\vdash_{FH} fm(S)$. Dann existiert ein Modell $f \models \{fm(S) : S \in \mathcal{S}\}$ mit $f \not\models fm(S)$, $S = \Gamma \Rightarrow \Delta$, $fm(S) = \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$. Dann ist $f \models_\nu \bigwedge \Gamma$ und $f \models_\nu \neg(\bigvee \Delta)$. Folglich ist $f \not\models S$ und damit $\mathcal{S} \not\models S$, ein Widerspruch zur Annahme.□

2.8 Übungen

1. Man beweise, daß für zwei beliebige Formeln A,B die folgenden Behauptungen äquivalent sind

   (a) $A \rightarrow B$ ist allgemeingültig

   (b) $A \wedge \neg B$ ist nicht erfüllbar

   (c) $M(\{A\}) \subseteq M(\{B\})$

2. Man gebe alle Modelle der Menge $\{p \rightarrow q, p \vee q\}$ an

3. Man beweise durch vollständige Induktion über den Formelaufbau für beliebige Formeln $A \in Fm(AK)$:

   Die Anzahl der Stellen, an denen das Zeichen (vorkommt, ist gleich der Zahl der Stellen, an denen das Zeichen) vorkommt, und diese Anzahl ist gleich der Gesamtzahl der Stellen, an denen in A einer der zweistelligen Funktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ steht.

4. Welche der folgenden Formeln ist allgemeingültiog, erfüllbar oder widersprüchlich.

   (a) $p \rightarrow (q \rightarrow) \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r$

   (b) $p \wedge q \rightarrow r$

   (c) $p \wedge q \rightarrow r \leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg r$

   (d) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(p \rightarrow r)$

   (e) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

   (f) $p \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow p$

5. Eine Bewertung $b : Fm(AK) \rightarrow \{0,1\}$ ist eine Abbilduing mit den folgenden Eigenschaften:

   $b(A \wedge B) = b(A) \cap b(B)$

   $b(A \vee B) = b(A) \cup b(B)$

   $b(\neg A) = b(A)^c$

   Man zeige: sind b_1, b_2 Bewertungen, so daß für alle Variablen $p \in Var$ gilt $b_1(p) = b_2(p)$, danan folgt $b_1 = b_2$.

   Hinweis: Induktion über den Formelaufbau.

6. Man zeige, daß
$$\models \bigvee_{i \leq n} A_i \to \bigwedge_{j \leq m} B_j$$
genau dann, wenn $\models A_i \to B_j$ für alle $i \leq n, j \leq m$.

7. Zu jeder Formel A existiert eine logisch äquivalente Formel, die nur $\to, \neg$ enthält.

8. Man zeige, daß die Menge Ag der logisch gültigen Formeln abgeschlossen ist gegenüber Substitutionen. Das heißt: Wenn $F \in Ag$, so $\sigma(F) \in Ag$ für jede Substitution σ.

9. Man konstruiere zu wenigstens 8 der 16 zweistelligen Booleschen Funktionen eine, die jeweilige Funktion rrepräsentierende, aussagenlogische Formel.

10. Für Formeln A, B gilt:

    Wenn $X \cup \{\neg A\} \models B$ und $X \cup \{\neg A\} \models \neg B$ gilt, so folgt $X \models A$.

11. Man zeige, wenn $X \models A$, so $X \models B \to A$

12. Man zeige, wenn $X \cup \{\neg B\} \models \neg A$, so gilt $X \cup \{A\} \models B$.

13. Man zeige, daß aus der Menge $X = \{p, q, q \to \neg p\}$ jede Formel folgt.

14. Man zeige: Wenn $X \cup \{A\} \models C$ und $X \cup \{B\} \models C$, dann $X \cup \{A \vee B\} \models C$.

15. $Fm(\wedge, \vee, \neg)$ sei die Menge aller Formeln aus $Fm(AK)$, die nur mittels der Funktoren $\wedge, \vee, \neg$ aufgebaut sind. Die zu A dual Formel A^d , wird wie folgt induktiv definiert.

    (a) $p^d = p$, falls $p \in Var$

    (b) $(A \vee B)^d = (A^d \wedge B^d)$

    (c) $(A \wedge B)^d = (A^d \vee B^d)$

    (d) $(\neg A)^d = \neg A^d$.

    Man beweise die folgende Beziehung:

    $\models A \leftrightarrow B$ genau dann, wenn $\models A^d \leftrightarrow B^d$.

3 Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. In der Prädikatenlogik wird die Feinstruktur von Aussagen analysiert.

3.1 Syntax und Semantik

Im Rahmen des Aussagenkalküls können nur solche logischen Zusammenhänge dargestellt werden, bei denen die Aussagen als ungetrenntes Ganzes betrachtet werden. Jedoch läßt sich auf diese Weise die Feinstruktur der Aussagen nicht erfassen. Wir betrachten z.B. den folgenden Satz: "Wenn Sokrates ein Mensch ist und alle Menschen sterblich sind, dann ist Sokrates sterblich." Die Wahrheit dieses Satzed ergibt sich reich logischen Gründen, jedoch läßt sich dies nicht im Rahmen des Aussagenkalküls einsehen. Es sei nämlich A die Ausssage "Sokrates ist ein Mensch", B die Aussage "Alle Menschen sind sterblich" unhd C bedeute "Sokrates ist sterblich", dann ließe sich der obige Satz durch den Ausdruck $A \wedge B \to C$ wiedergeben. Die enstehende aussagenlogische Formel ist jedoch nicht logisch gültig.

Um die logische Struktur derartiger Aussagen zu erfassen, ist es notwendig, die Natur der einfachsten Bestandteile zu erfassen. Diese elementaren Bestandteile einer Aussage werden durch die Beziehung zwischen Subjekt und Objekt wiedergegeben. Aussagen, die mit Hilfe von Subjekt und Prädikat vollständig erfaßt werden können, heißen prädikative Aussagen. Beispiele sind " 5 ist Primzahl", "1 ist kleiner als 2", "2 liegt zwischen 1 und 3". Subjekte sind Namen (Symbole) für Individuen (Objekte). Zwei Subjekte sollen bedeutungsgleich heißen, wenn sie dasselbe Individuum bezeichnen. Prädikative Formen sind formale Ausdrücke zur Bezeichnung von Relationen, die auch Attribute genannt werden. Eine n-stellige Relation wird extensional aufgefaßt als eine Menge von n-Tupeln eines bestimmten Individuenbereichs. Eine prädikative Form beginnt mit dem Namen einer Relation, gefolgt von Argumentstellen. Wir können die Argumentstellen mit Variablen besetzen, die über bestimmten Individuenbereichen interpretiert werden.. Eine prädikative Form geht in eine prädikative Aussage über,wenn die Variablen des Ausdrucks durch Individuenkonstanten ersetzt werden.

Operatoren oder Funktoren sind Symbole, die dazu dienen, komplexere Ausdrücke zu bilden. Neben den aussasgenlogischen Funktoren spielen die Quantoren eine fundamentale Rolle. Die wichtigsten Quantoren sind der Allquantor, notiert durch $\forall$, und der Existenzquantor, den wir durch $\exists$ bezeichnen. Durch die Zeichenreihe $\exists x$ wird die Redeweise "Es gibt Dinge x, so daß ..." unhd ruch $\forall x$ die Redewendunhg : "für all x gilt ..." repräsentiert. Die prädikativen Formen lassen sich mittels aussagenlogischer Funktoren und der Quantoren zu komplexeren Ausdrücken zusammensetzen, die wir Aussageformen oder Formeln nennen. Im folgenden werden die eben skizzierten methodischen Grundgedanken präzisiert.

Def 3.1 (Signatur) *Eine* Signatur $\Sigma = (\mathbb{F}, \mathbb{R}, \mathbb{K}; \mathrm{ar})$ *ist festgelegt durch*

1. *eine Menge* $\mathbb{F}$ *von Funktionssymbolen,*
2. *eine Menge* $\mathbb{R}$ *von Relationssymbolen und*
3. *eine Menge* $\mathbb{K}$ *von Konstantensymbolen,*
4. *eine Funktion* $\mathrm{ar} : \mathbb{F} \cup \mathbb{R} \to \omega$ *(Arität)*

ar gibt die Stellenzahl der Funktions- und der Relationssymbole an. Wir vereinbaren, daß die Konstanten $c \in \mathbb{K}$ als nullstellige Funktionen interpretiert werden. Dann gilt also $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$. Signaturen werden im folgenden durch $\Sigma = (\mathbb{F}, \mathbb{R})$ notiert, die Aritätsfunktion ar wird nicht explizit genannt. Wenn $\mathbb{F} \cup \mathbb{R}$ endlich ist, kennzeichen wir eine Signatur auch durch $\Sigma = (f_1, \ldots, f_n, R_1, \ldots, R_m)$.

Def 3.2 (prädikatenlogisches Alphabet)

Prädikatenlogisches Alphabet $Al(\Sigma)$ über Σ besteht aus folgenden atomaren Symbolen:

1. *Variablen für Individuen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x, y, z$;* Var *bezeichne die Menge aller Variablen,*
2. *logische Funktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ ($\forall$ und $\exists$ werden* Quantoren *genannt).*
3. *die durch die Signatur Σ festgelegten Funktions-, Relations- und Konstantensymbole, notiert durch $\mathbb{F}(\Sigma)$, $\mathbb{R}(\Sigma)$, $\mathbb{K}(\Sigma)$. Funktionssymbole werden allgemein durch f, g, h und Relationssymbole durch P, Q, R bezeichnet.*
4. *technische Hilfszeichen: $), ($.*

Kommt in einer Zeichenreihe an einer Stelle die Variable x vor und steht unmittelbar davor ein Quantor, so kommt die Variable an der betreffenden Stelle *quantifiziert* vor, und zwar *generalisiert*, wenn davor der Allquantor $\forall$ steht, und *partikularisiert*, wenn davor der Existenzquantor $\exists$ steht. Die Variable x kommt in der Zeichenreihe Z *vollfrei* vor, wenn x in Z vorkommt, aber die Zeichenreihe $\forall x$ oder $\exists x$ nicht in Z vorkommt.

Aus der Menge $Al(\Sigma)^*$ der Zeichenreihen werden nun die Terme und die Formeln ausgesondert:

Def 3.3 (Terme und Formeln)

1. *Die Menge der Terme $Tm(\Sigma)$ ist die kleinste Menge aller Zeichenketten über dem Alphabet $Al(\Sigma)$, die die Menge* $\mathrm{Var} \cup \mathbb{K}(\Sigma)$ *enthält und abgeschlossen ist bezüglich der folgenden rekursiven Definition:*

   $$\text{wenn } t_1, \ldots, t_n \in Tm(\Sigma),\ f \in \mathbb{F}(\Sigma),\ \mathrm{ar}(f) = n,\ \text{so } f(t_1, \ldots, t_n) \in Tm(\Sigma)$$

2. *Eine* Atomformel *ist eine Zeichenkette der Gestalt $R(t_1, \ldots, t_n)$, wobei $R \in \mathbb{R}(\Sigma)$, $t_1, \ldots, t_n \in Tm(\Sigma)$, $\mathrm{ar}(R) = n$*
3. *$Fm(\Sigma)$ ist die kleinste Menge der Zeichenreihen über $Al(\Sigma)$, die die atomaren Formeln enthält und folgende Bedingung erfüllt:*
   wenn $A, B \in Fm(\Sigma)$, so $\{A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, \neg A, A \leftrightarrow B\} \subseteq Fm(\Sigma)$. Wenn $A(x) \in Fm(\Sigma)$ und x ist $A(x)$ vollfrei*, so $\{\forall x\, A(x), \exists x\, A(x)\} \subseteq Fm(\Sigma)$*

Def 3.4 (freie Variablen) *Sei $A \in Fm(\Sigma)$, dann wird die Menge* $\mathrm{fvar}(A)$ *der freien Variablen in A wie folgt definiert:*

1. *Ist A atomar, so* $\mathrm{fvar}(A) = \mathrm{var}(A)$
2. $\mathrm{fvar}(A \wedge B) = \mathrm{fvar}(A \vee B) = \mathrm{fvar}(A \rightarrow B) =_{df} \mathrm{fvar}(A) \cup \mathrm{fvar}(B)$,
   $\mathrm{fvar}(\neg A) =_{df} \mathrm{fvar}(A)$
3. $\mathrm{fvar}(\forall x\, A(x)) = \mathrm{fvar}(\exists x\, A(x)) =_{df} \mathrm{fvar}(A) \setminus \{x\}$

Def 3.5 (Aussage) *Eine Formel A heißt* Aussage, *wenn sie keine freien Variablen besitzt* ($\mathrm{fvar}(A) = \emptyset$).

Def 3.6 (Substitution) *Eine* Substitution σ *ist eine Abbildung* $\sigma : \mathrm{Var} \rightarrow Tm$*, so daß für fast alle* $x \in \mathrm{Var} : \sigma(x) = x$; $\mathrm{dom}(\sigma) = \{x / x \in \mathrm{Var},\ \sigma(x) \neq x\}$

Nebenbetrachtung: Mit Zeichenkettenoperationen {copy, write, read, assign} läßt sich jeder Algorithmus realisieren, insbesondere Substitution.

Def 3.7 (Σ-Struktur) *Sei* $\Sigma = (\mathbb{F}, \mathbb{R}, \mathbb{K}; \mathrm{ar})$ *eine Signatur.*
Eine Σ-Struktur $\mathfrak{A} = (U, (f^\delta)_{f\in\mathbb{F}}, (R^\delta)_{R\in\mathbb{R}}, (c^\delta)_{c\in\mathbb{K}})$ *ist festgelegt durch*

1. *eine Menge von Individuen U,*
2. $f^\delta : U^{\mathrm{ar}(f)} \rightarrow U$
3. $R^\delta \subseteq U^{\mathrm{ar}(R)}$
4. $c^\delta \in U$

Derartige Σ-Strukturen heißen *Relationalstrukturen*. Für eine Relationalstruktur $\mathfrak{A}$ sei $\mathrm{sgt}(\mathfrak{A})$ die zu $\mathfrak{A}$ gehörende Signatur. Durch $U(\mathfrak{A})$ wird die Grundmenge von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Die Menge der Relationen von $\mathfrak{A}$ wird mit $\mathbb{R}(\mathfrak{A})$ und die Menge der Funktionen, die für $\mathfrak{A}$ definiert sind, mit $\mathbb{F}(\mathfrak{A})$ bezeichnet. Für ein Funktionssymbol $f \in \Sigma$ und eine Σ-Struktur $\mathfrak{A}$ sei $f^{\mathfrak{A}}$ diejenige Funktion, die dem Funktionssymbol f in $\mathfrak{A}$ zugeordnet wird. Analog werden $R^{\mathfrak{A}}$ und $c^{\mathfrak{A}}$ definiert.

Eine Teilmenge $M \subseteq U(\mathfrak{A})$ heißt *abgeschlossen* in $\mathfrak{A}$, wenn für jede Funktion $f^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{F}(\mathfrak{A})$ und beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_k \in M$ die Bedingung $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) \in M$ erfüllt ist. $Gr(f^{\mathfrak{A}})$ sei der Graph der Funktion $f^{\mathfrak{A}}$, der durch $Gr(f^{\mathfrak{A}}) = \{(a_1, \ldots, a_k, a) \,/\, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = a\}$ definiert ist.

Def 3.8 (Teilstruktur und Erweiterung) *Eine Σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine* Unterstruktur *oder eine* Teilstruktur *einer Σ-Struktur $\mathfrak{B}$, notiert $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, wenn folgendes gilt:*

1. $U(\mathfrak{A}) \subseteq U(\mathfrak{B})$ *und* $U(\mathfrak{A})$ *ist abgeschlossen in* $\mathfrak{B}$,
2. *für jede Relation* $R^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{R}(\mathfrak{A})$ *gilt* $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \upharpoonright U(\mathfrak{A})$,
3. *für jede Funktion* $f^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{F}(\mathfrak{A})$ *gilt* $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright U(\mathfrak{A})$.

Def 3.9 (Teilsystem) *Die Signatur Σ^* entstehe aus Σ, indem jedes in $\mathbb{F}(\Sigma)$ vorkommende Funktionssymbol f der Arität n, $n > 0$, durch ein nicht in Σ vorkommendes $(n+1)$-stelliges Relationszeichen G_f ersetzt wird. Eine Σ^*-Struktur $\mathfrak{A}$ ist* Teilsystem *der Σ-Struktur $\mathfrak{B}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$U(\mathfrak{A}) \subseteq U(\mathfrak{B})$,*
2. *für jede Relation $R^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{R}(\mathfrak{A})$ gilt $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \restriction U(\mathfrak{A})$,*
3. *für jedes Relationssymbol $G_f \in \mathbb{R}(\Sigma^*)$ gilt $G_f^{\mathfrak{A}} = Gr(f^{\mathfrak{B}}) \restriction U(\mathfrak{A})$.*

Def 3.10 (Expansion und Redukt) *$\mathfrak{B}$ ist* Expansion *von $\mathfrak{A}$, wenn gilt:*

1. *$U(\mathfrak{A}) = U(\mathfrak{B})$,*
2. *$\mathrm{sgt}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{sgt}(\mathfrak{B})$,*
3. *für alle $R \in \mathbb{R}(\mathfrak{A})$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}}$, ebenso für Funktionen.*

A heißt Redukt *von $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{B}$ Expansion von $\mathfrak{A}$ ist. Wenn $\Sigma_1 \subseteq \mathrm{sgt}(\mathfrak{B})$ und $\Sigma_1 = \mathrm{sgt}(\mathfrak{A})$, so heißt $\mathfrak{A}$ auch Σ_1-Redukt von $\mathfrak{B}$. Ebenso sprich man von einer Σ-Expansion.*

Def 3.11 (Konstanten-Expansion) *Für eine Teilmenge $M \subseteq U(\mathfrak{A})$ sei $\mathbb{K}(A, M) = (c_a : a \in M\}$ eine Menge von Konstanten, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *wenn $a \neq b$, so $c_a \neq c_b$,*
2. *$\mathbb{K}(\mathfrak{A}, M) \cap \mathbb{K}(\Sigma) = \emptyset$.*

Für $\mathbb{K}(\mathfrak{A}, U(\mathfrak{A}))$ schreiben wir auch $\mathbb{K}(\mathfrak{A})$. Das Paar $(\mathfrak{A}, (c_a)_{a\in M})$ heißt Konstanten-Expansion *für M von $\mathfrak{A}$.*

Sei μ eine Belegung der Variablen in Var, $\mu : \mathrm{Var} \to U$. μ läßt sich zu $\bar{\mu} : Tm(\Sigma) \to U$ erweitern, $\mu \subseteq \bar{\mu}$ mit

1. $\bar{\mu}(t) = \mu(t)$, $t \in \mathrm{Var}$,
2. $\bar{\mu}(f(t_1, \dots, t_n)) = f^{\delta}(\bar{\mu}(t_1), \dots, \bar{\mu}(t_n))$

Für zwei Belegungen $\mu, \nu \in U(\mathfrak{A})^{\mathrm{Var}}$ und Variablen $M = \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq \mathrm{Var}$ sei $\mu =_M \nu$ gdw. $\mu(x) = \nu(x)$ für alle $x \in \mathrm{Var} \setminus M$. Für $\mu =_{\{x\}} \nu$ schreiben wir einfach $\mu =_x \nu$.

Def 3.12 (Erfüllbarkeitsrelation) *“$\mathfrak{A} \models_\mu B$” ($B$ wird von μ in $\mathfrak{A}$ erfüllt), wenn folgendes gilt:*

1. *Sei $B = R(t_1, \dots, t_n)$; $\mathfrak{A} \models_\mu R$ genau dann, wenn $(\bar{\mu}(t_1), \dots, \bar{\mu}(t_n)) \in R^{\delta}$*

2. *$\mathfrak{A} \models_\mu A \wedge B$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models_\mu A$ und $\mathfrak{A} \models_\mu B$, analog für $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.*
   $\mathfrak{A} \models_\mu \neg A \iff \mathfrak{A} \not\models_\mu A$.

3. *$\mathfrak{A} \models_\mu \exists x\, B(x) \iff$ es existiert eine Belegung $\nu =_x \mu$ (d. h. sie stimmt bis auf die Stelle x mit μ überein), so daß $\mathfrak{A} \models_\nu B(x)$;*
   $\mathfrak{A} \models_\mu \forall x\, B(x) \iff$ für alle ν mit $\nu =_x \mu$: $\mathfrak{A} \models_\nu B(x)$

Beispiel: U sei die Menge der Menschen, {Hans, Otto} $\subseteq U$; *vater* sei eine zweistelige Relation über U, (Hans, Otto) $\in$ *vater*; $V(x,y)$ sei eine Formel, $V^\delta = vater$. Dann gilt

$$(U, \dots) \models_\mu V(x,y) \iff (\mu(x), \mu(y)) \in V^\delta = vater$$

Weitere relevante Begriffe:

- Eine Formel(menge) F ist *erfüllbar* in $\mathfrak{A}$, wenn die *Erfüllungsmenge* $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, F) \neq \emptyset$, wobei $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, F) = \{\nu / \mathfrak{A} \models_\nu F\}$.
- F ist *wahr* in $\mathfrak{A}$ (gültig in $\mathfrak{A}$), wenn für alle $\nu : \mathrm{Var} \to U$ gilt: $\mathfrak{A} \models_\nu F$, symbolisch: $\mathfrak{A} \models F$. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Modell* für F.
- F heißt *logisch gültig* (*allgemeingültig, logisch wahr*), wenn für alle $\mathfrak{A}$ gilt $\mathfrak{A} \models F$.

Beispiel: $\forall x\, A(x) \to \exists x\, A(x)$ ist logisch gültig.

Unter einer *Theorie* verstehen wir eine Menge von Formeln. Eine Σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist ein *Modell* einer Theorie X, wenn jede Formel aus X in $\mathfrak{A}$ gültig ist; $\mathrm{Mod}(X)$ ist die Klasse aller Modelle von X der Signatur $sgt(X)$. Es sei $\Sigma \subseteq \Sigma_1$. Dann ist $\mathrm{Mod}(X, \Sigma_1) = \{\mathfrak{A} :$ es existiert ein $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(X)$ und $\mathfrak{A}$ ist Σ_1-Expansion von $B\}$.

Offensichtlich gilt: $\mathrm{Mod}(X) = \mathrm{Mod}(X, \mathrm{sgt}(X))$. Für eine Klasse $\mathcal{R}$ von Strukturen derselben Signatur sei $\mathcal{R} \models A$, wenn für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{R}$ die Bedingung $\mathfrak{A} \models A$ gilt.

$Th(\mathcal{R}) = \{A, / \mathcal{R} \models A\}$ ist die Theorie der Klasse $\mathcal{R}$. Mit $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ wird die Klasse aller Σ-Strukturen bezeichnet.

3.2 Logisches Folgern

Von grundsätzlicher Bedeutung ist die semantisch definierte Folgerungsrelation. Durch sie wird, ähnlich wie im Aussagenkalkül, das inhaltliche Schließen präzisiert.

Def 3.13 *Seien $F \in Fm(\Sigma)$ eine Formel, $X \subseteq Fm(\Sigma)$ sei eine Menge von Formeln der Signatur Σ.*

1. F folgt *aus X, wenn jedes Modell von X ein Modell von F ist. Dies bezeichnen wir mit $X \models F$. Die Menge $X^{\models}$ aller Formeln, die aus X folgen, wird durch $X^{\models} = \{F / X \models F\}$ definiert.*

2. F folgt stark *aus X, notiert $X \models_s F$, wenn für alle $\mathfrak{A} \in$* $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ *gilt* $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, X) \subseteq \mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, F)$.

Satz 3.1 *Seien X, Y Mengen von Formeln. Dann gilt:*

1. *Wenn $X \models_s F$, so $X \models F$*
2. *$X \subseteq X^{\models}$ (Einbettung, Inklusion)*
3. *$(X^{\models})^{\models} \subseteq X^{\models}$ (Idempotenz, Abgeschlossenheit)*
4. *Wenn $X \subseteq Y$, so $X^{\models} \subseteq Y^{\models}$*

Beweis:

1. Zu zeigen, $\mathrm{Mod}(X) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$.
   Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(X)$. Es ist dann, $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, X) = U(\mathfrak{A})^{\mathrm{Var}} \curvearrowright \mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, X) \subseteq \mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, F)$ $\curvearrowright \mathfrak{A} \in F$.

2. Sei $X \models F$, $X \subseteq Y$. Zu zeigen, $Y \models F$.
   $Y \models F \iff \mathrm{Mod}(Y) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$; Aus $X \subseteq Y$ folgt $\mathrm{Mod}(Y) \subseteq \mathrm{Mod}(X)$. Mit $Mod(X) \subseteq Mod(\{F\})$ folgt die Behauptung. □

Def 3.14 *Sei $A(y_1, \ldots, y_n)$ eine Formel mit $\mathrm{fvar}(A) = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Eine Formel $A^* = \forall y_1 \cdots \forall y_n\, B(y_1, \ldots, y_n)$ heißt Generalisierte von A, wenn sich $B(y_1, \ldots, y_n)$ durch gebundene Umbenennung aus $A(y_1, \ldots, y_n)$ ergibt, so daß $\mathrm{fvar}(B) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ und jede in B freie Variable vollfrei ist. Offensichtlich existiert zu jeder Formel $A(y_1, \ldots, y_n)$ eine Generalisierte $A^* = \forall y_1 \cdots \forall y_n\, B(y_1, \ldots, y_n)$.*

Satz 3.2 *Für alle Formeln A, B und $X \subseteq Fm(\Sigma)$ gilt:*

1. *Wenn $X \models A \to B$ und $X \models A$, so $X \models B$ (*Abtrennungsregel*).*
2. *Sei $A(y_1, \ldots, y_n)$ eine Formel mit $\mathrm{fvar}(A) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ und $A^* = \forall y_1 \cdots \forall y_n\, A(y_1, \ldots, y_n)$ (A^* ist eine Generalisierte von A).*
   Dann gilt $X \models A$ gdw. $X \models A^*$.
3. *Es sei $X \models A(c_1, \ldots, c_n)$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \cap \mathrm{sgt}(X) = \emptyset$ (die Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ mögen in X nicht vorkommen).*
   Dann gilt: $X \models \forall x_1 \cdots \forall x_n\, A(x_1, \ldots, x_n)$

Beweis:

(3) Sei $F = \forall x_1 \cdots \forall x_n\, A(x_1, \ldots, x_n)$. Zu zeigen ist, $X \models F$, d. h. $\mathfrak{A} \models X \curvearrowright \mathfrak{A} \models F$.
$\mathfrak{A} \models F \iff$ für alle $\nu \in U(\mathfrak{A})^{\mathrm{Var}}$: $\mathfrak{A} \models_\nu A(x_1, \ldots, x_n)$.
Seien $a_1 = \nu(x_1), \ldots, a_n = \nu(x_n)$, $a_i \in U(\mathfrak{A})$ und $c_1, \ldots, c_n$ seien Konstanten, die die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen.
Nach Voraussetzung $X \models A(c_1, \ldots, c_n)$. $\mathfrak{A}$ sei ein Modell von X: $\mathfrak{A} \models X$. Die Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ haben in $\mathfrak{A}$ keine Interpretation, d. h. $c_1, \ldots, c_n$ sind frei interpretierbar. Wir setzen daher $c_i^\delta := a_i$, somit gilt $(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_n) \models A(c_1, \ldots, c_n)$ $\curvearrowright \mathfrak{A} \models_\nu A(x_1, \ldots, x_n)$.□

Satz 3.3

1. *$X \models A \to B$, so $X \cup \{A\} \models B$ (*Ableitungstheorem*).*
2. *Wenn A eine Aussage ist (d. h. keine freien Variablen hat), dann wenn $X \cup \{A\} \models B$, so $X \models A \to B$ (*Deduktionstheorem*).*
3. *Ist A eine Aussage, so folgt aus $\mathrm{Mod}(X \cup \{A\}) = \emptyset$ die Beziehung $X \models \neg A$.*
4. *Wenn $X \models \neg A$, so $\mathrm{Mod}(X \cup \{A\}) = \emptyset$.*

Beweis:

(2) Zu zeigen: $X \models A \to B$.
Sei $\mathfrak{A} \models X$. $\mathfrak{A} \models A \to B$ genau dann, wenn $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, A) \subseteq \mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, B)$.
A ist eine Aussage, d. h. es gilt: $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, A) \neq \emptyset \quad \curvearrowright \mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, A) = U(\mathfrak{A})^{\mathrm{Var}} \quad \curvearrowright \mathfrak{A} \models X \cup \{A\} \quad \curvearrowright \mathfrak{A} \models B$.

(3) Sei $\mathrm{Mod}(X \cup \{A\}) = \emptyset \quad \curvearrowright \mathrm{Mod}(X) \cap \mathrm{Mod}(A) = \emptyset$. Da A eine Aussage ist, so gilt: $\mathrm{Mod}(\neg A) = \mathrm{Mod}(\Sigma) \setminus \mathrm{Mod}(A) \quad \curvearrowright \mathrm{Mod}(X) \subseteq \mathrm{Mod}(\neg A) \quad \curvearrowright X \models \neg A.\Box$

Satz 3.4 *Es gelten die folgenden Bedingungen:*

1. *$Ag = \emptyset^{\models}$*
2. *Wenn $X^{\models} = Fm(PK)$, so $\mathrm{Mod}(X) = \emptyset$*
3. *Wenn X eine Menge von Aussagen ist und $\mathrm{Mod}(X) = \emptyset$, dann gilt: $X^{\models} = Fm(PK)$*
4. *$A \in Ag \iff \neg A \notin \mathrm{Erf}$*

Bemerkung zur Gleichheitsbeziehung:

Sei $\mathfrak{A} = (U, R)$ eine Relationalstruktur mit $R \subseteq U \times U$, $\mathrm{id}_A = \{(a,a)/a \in U\}$. Gesucht ist eine Menge X von Formeln, so daß gilt:
Wenn $\mathfrak{A} \models X$, so $R = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$. Dabei sollen die Bedingungen

1. $\forall x\, (R(x,x))$ (Reflexivität)
2. $\forall xy\, (R(x,y) \to R(y,x))$ (Symmetrie)
3. $\forall xyz\, (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$ (Transitivität)

erfüllt werden, die wir als $Ax(Id)$ bezeichnen.
Die Gleichheit wollen wir nach dem Prinzip von Leibniz präzisieren: sei $A(x_1, \ldots, x_n) \in Fm(PK)$, dann

$$(x = y) \longrightarrow \Big(A(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \longleftrightarrow A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)\Big)$$

Def 3.15 (Gleichheitsrelation) *Sei $\mathfrak{A} \models Ax(Id)$. Dann definieren wir die Relation $=^{\mathfrak{A}}$ wie folgt:*

1. $=^{\mathfrak{A}}$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* $U(\mathfrak{A})$.
2. *Wenn* $(a_i, b_i) \in =^{\mathfrak{A}}$, $i \leq n$ *und* $f^{\mathfrak{A}} : U^n \to U$ *eine* n*-stellige Funktion ist, dann gilt:*
$$\Big(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n)\Big) \in =^{\mathfrak{A}}$$
3. *Wenn* $(a_i, b_i) \in =^{\mathfrak{A}}$, $i = 1, \dots, m$, $R^{\mathfrak{A}} \subseteq U^m$, *so* $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}}$ *genau dann, wenn* $(b_1, \dots, b_m) \in R^{\mathfrak{A}}$

Sei $\mathfrak{A} = (U, (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J})$, $[a] = \{b/(a, b) \in =^{\mathfrak{A}}\}$.
Die Faktorstruktur $\mathfrak{A}^* = (U_{/=^{\mathfrak{A}}}, (f_i^*)_{i \in I}, (R_j^*)_{j \in J})$ wird wie folgt erklärt:

- $f_i^*([a_1], \dots, [a_n]) =_{df} [f_i(a_1, \dots, a_n)]$
- $([a_1], \dots, [a_n]) \in R_j^* \iff (a_1, \dots, a_n) \in R_j$

Sei $F \in Fm(PK)$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models F \iff \mathfrak{A}^* \models F$.

Satz 3.5 (Hauptsatz der Identitätstheorie für Prädikatenkalkül)
Es sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $Ax(Id)$ und $\mathfrak{A}^*$ sei die Faktorstruktur von $\mathfrak{A}$ nach der Gleichheitsrelation $=^{\mathfrak{A}}$. Ferner sei $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^*$ die durch die Beziehung $\varphi(a) = [a]$ festgelegte Abbildung.
Für beliebige Formeln $A(x_1, \dots, x_n)$ und Belegungen μ über $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models_\mu A(x_1, \dots, x_n) \textit{ genau dann, wenn } \mathfrak{A}^* \models_{\mu \circ \varphi} A(x_1, \dots, x_n)$$

Anschaulich:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Var} \arrow[rr, "\mu \circ \varphi"] \arrow[dr, "\mu"'] & & U(\mathfrak{A}^*) \\
& U(\mathfrak{A}) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: (induktiv über den Rang von A)

1. A ist Atomformel
   (a) Seien $A := s = t$, s, t Terme. Dann gilt: $\mathfrak{A} \models_\mu (s = t) \iff (\mu(s), \mu(t)) \in =^{\mathfrak{A}}$ $\iff [\mu(s)] = [\mu(t)] \iff \mu \circ \varphi(s) = \mu \circ \varphi(t)$ und damit $\mathfrak{A}^* \models_{\mu \circ \varphi} (s = t)$.
   (b) Sei $A := R(t_1, \dots, t_n)$. Dann $\mathfrak{A} \models_\mu R(t_1, \dots, t_n) \iff (\mu(t_1), \dots, \mu(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$. Da $\mathfrak{A} \models Ax(Id)$, so eine weitere äquivalente Umformung $([\mu(t_1)], \dots, [\mu(t_n)]) \in R^{\mathfrak{A}^*}$.
   Das bedeutet, $\mathfrak{A}^*_{\mu \circ \varphi} \models R(t_1, \dots, t_n)$.

2. $\mathfrak{A} \models_\mu \neg B \iff \mathfrak{A} \not\models_\mu B$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies genau dann, wenn $\mathfrak{A}^* \not\models_{\mu\circ\varphi} B \iff \mathfrak{A}^* \models_{\mu\circ\varphi} \neg B$.

3. Für $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ analog.

   ($\rightarrow$) Sei $A := \exists x\, B(x)$ und $\mathfrak{A} \models_\mu \exists x\, B(x)$. Dann existiert eine Belegung $\nu =_x \mu$ mit $\mathfrak{A} \models_\nu B(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{A}^* \models_{\nu\circ\varphi} B(x)$. Da $\mu \circ \varphi =_x \nu \circ \varphi$, so folgt schließlich $\mathfrak{A}^* \models_{\mu\circ\varphi} \exists x\, B(x)$.

   ($\leftarrow$) Sei $\mathfrak{A}^* \models_{\mu\circ\varphi} \exists x\, B(x)$. Dann existiert eine Belegung $\lambda : \mathrm{Var} \rightarrow U(\mathfrak{A}^*)$ mit $\mu \circ \varphi =_x \lambda$ und $\mathfrak{A}^* \models_\lambda B(x)$.
   Es sei ν eine Belegung $\nu : \mathrm{Var} \rightarrow U(\mathfrak{A})$, so daß $\nu =_x \mu$ und $\nu(x) \in \lambda(x)$.
   Dann gilt $\mathfrak{A} \models_\nu B(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{A}^* \models_{\nu\circ\varphi} B(x)$. Diese Bedingung gilt, weil nach Konstruktion $\nu \circ \varphi = \lambda$.
   Da $\nu =_x \mu$, so folgt schließlich $\mathfrak{A} \models_\mu \exists x\, B(x)$.

   ($\rightarrow$) (Bei einer Genau–dann–wenn-Beziehung braucht man den Fall mit dem Quantor $\forall$ nicht explizit zu zeigen, denn es gilt, wie es sich später herausstellt, $\forall x \equiv \neg\exists x \neg$).$\square$

Eine Σ-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *normal*, wenn das Relationszeichen "=" durch die Identitätsrelation $\mathrm{id}_\mathfrak{A} = \{(a,a) \,/\, a \in U(\mathfrak{A})\}$ interpretiert wird. Durch $\mathrm{Mod}_n(\Sigma)$ bezeichnet man die Klasse der normalen Modelle.

Sei $\mathrm{Mod}_n(X) = \mathrm{Mod}(X) \cap \mathrm{Mod}_n(\Sigma)$. Dann definieren wir $X \models_n F$ genau dann, wenn $\mathrm{Mod}_n(X) \subseteq \mathrm{Mod}(\{F\})$.

Satz 3.6 *Für $\mathfrak{A} \models Ax(Id)$, $F \in Fm(\Sigma)$, $X \subseteq Fm(\Sigma)$ gelten die folgenden Behauptungen*

1. $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{A}^*)$
2. *Wenn $X \models F$, so $X \models_n F$.*
3. $X \cup Ax(Id) \models F \iff X \models_n F$

Dieser Satz besagt, daß man auf der Ebene des Folgerns und Schließens keinen Unterschied zur Normalidentität merkt.

3.3 Logische Äquivalenz und pränexe Normalform

Def 3.16 *Zwei Formeln A und B heißen* logisch äquivalent, *notiert $A \equiv B$, wenn für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ der Signatur* $\mathrm{sgt}(A) \cup \mathrm{sgt}(B)$ *und beliebigen Belegungen $\mu : \mathrm{Var} \rightarrow U(\mathfrak{A})$ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models_\mu A \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{A} \models_\mu B$$

Wenn $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, A) = \mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, B)$, *so sind A und B* äquivalent *in $\mathfrak{A}$.*

Satz 3.7 *A, B seien Formeln der Signatur Σ. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. $A \equiv B$,
2. $\models A \leftrightarrow B$,
3. *für alle* $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ *gilt* $\mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, A) = \mathrm{Erf}(\mathfrak{A}, B)$,
4. *für alle* $\mathfrak{A}$ *gilt* $\mathfrak{A} \models A \leftrightarrow B$.

Satz 3.8 *Es gelten folgende logische Äquivalenzen:*

1. $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
2. $\forall x\,(A \wedge B) \equiv \forall x\, A \wedge B$, *falls* $x \notin \mathrm{var}(B)$
3. $\exists x\,(A \wedge B) \equiv \exists x\, A \wedge B$, *falls* $x \notin \mathrm{var}(B)$
4. $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists\, B(x)$
5. $\forall x\,(A \vee B) \equiv \forall x\, A \vee B$, *falls* $x \notin \mathrm{var}(B)$
6. $\forall x\,(A \to B) \equiv A \to \forall x\, B$, *falls* $x \notin \mathrm{var}(A)$
7. $\exists x\,(A \to B) \equiv \forall x\, A \to B$, *falls* $x \notin \mathrm{var}(B)$
8. $\exists x\,(A \to B) \equiv A \to \exists x\, B$, *falls* $x \notin \mathrm{var}(A)$
9. $\neg\forall x\, A(x) \equiv \exists x\, \neg A(x)$
10. $\neg\exists x\, A(x) \equiv \forall x\, \neg A(x)$

Beweis:

(1) ($\to$) Zu zeigen, $\models \forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \to \Big(\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)\Big)$.
Sei $\mathfrak{A} \models_\mu \forall x\, A(x), \forall x\, B(x)$. Es folgt für alle $\nu =_x \mu$: $\mathfrak{A} \models_\mu A(x) \wedge B(x) \iff \Big[\mathfrak{A} \models_\mu A(x)$ und $\mathfrak{A} \models \mu B(x)\Big] \iff \mathfrak{A} \models \forall x\, A(x), \forall x\, B(x) \iff \mathfrak{A} \models \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$.

($\leftarrow$) Der Beweis von $\models \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \to \forall x\,(A(x) \wedge B(x))$ erfolgt analog.$\square$

Zwar ist $\models \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \to \forall x\,(A(x) \vee B(x))$ trivialerweise erfüllt, aber es gilt $\models \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \not\equiv \forall x\,(A(x) \vee B(x))$.

Gegenbeispiel: Sei $U = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$, $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$.
Es gilt dann: $(U, P, Q) \models \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$, aber $(U, P, Q) \not\models \forall\, P(x) \vee \forall\, Q(x)$.

Def 3.17 *Die Menge* Prän *der pränexen Formeln ist die kleinste Menge von Formeln, die die quantorfreien Formeln enthält und abgeschlossen ist gegenüber folgender Bedingung:*
Gilt $A(x) \in$ Prän *und* x *ist in* $A(x)$ *vollfrei, so* $\{\forall x\, A(x), \exists x\, A(x)\} \subseteq$ Prän.

Beispiel: Seien $P(x)$, $R(x,y)$ zwei quantorfreie Formeln. Dann gehören die Formeln $P(y) \wedge R(u,v)$ sowie $\exists y \forall u \Big(\big(P(y) \wedge R(u,v)\big) \wedge R(x,z) \Big)$ zur Menge der pränexen Formeln.
Im allgemeinen haben die pränexen Formeln die Struktur

$$Q_1 x_{i_1} \cdots Q_k x_{i_k} \underbrace{B(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, y_1, \ldots, y_t)}_{\text{quantorfrei}} \quad \text{mit } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Der quantorfreie Teil einer pränexen Formel heißt *Matrix*.

Satz 3.9 *Zu jeder Formel* F *läßt sich effektiv eine pränexe Formel* G *mit denselben freien Variablen konstruieren, so daß* $F \equiv G$.

Beweisskizze:

1. Elimination von $\rightarrow, \leftrightarrow$ (mittels Aussagenlogik),
2. dann Anwendung der im Satz 3.8 genannten Äquivalenzen.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll}
\big(Q(x,y) \rightarrow \exists z\, Q(u,z)\big) \vee \forall v\, \big(R(v) \wedge Q(v,x)\big) & \equiv \\
\big(\neg Q(x,y) \wedge \exists z\, Q(u,z)\big) \wedge \forall v\, \big(R(v) \wedge Q(v,x)\big) & \equiv \quad \text{(Verschiebungsregeln)} \\
\exists z\, \big(\neg Q(x,y) \vee Q(u,z)\big) \vee \forall v \big(R(v) \wedge Q(v,x)\big) &
\end{array}$$

An dieser Stelle kann man entweder die Tatsache ausnutzen, daß v in der Teilformel $\exists z\, \big(\neg Q(x,y) \vee Q(u,z)\big)$ nicht vorkommt, und es ergibt sich schließlich die Formel $\forall v \exists z \Big(\neg Q(x,y) \vee Q(u,z) \vee \big(R(v) \wedge Q(v,x)\big)\Big)$, oder man merkt, daß die Variable z in der Teilformel $\forall v \big(R(v) \wedge Q(v,x)\big)$ nicht auftaucht; daraus erschließen wir: $\exists z \Big(\neg Q(x,y) \vee Q(u,z) \vee \forall v\, \big(R(v) \wedge Q(v,x)\big)\Big) \equiv \exists z \forall v \Big(\neg Q(x,y) \vee Q(u,z) \vee \big(R(v) \wedge Q(v,x)\big)\Big)$.

Die pränexen Formeln lassen sich nach der Anordnung von Quantoren klassifizieren. So unterscheidet man z. B.

$\forall$-Formeln: $\forall x_1 \cdots \forall x_n B(x_1, \ldots, x_n)$, $B(\bar{x})$ quantorfrei,

$\exists$-Formeln: $\exists x_1 \cdots \exists x_n B(x_1, \ldots, x_n)$, $B(\bar{x})$ quantorfrei,

$\forall\exists$-Formeln: $\forall x_1 \cdots \forall x_m \exists y_1 \cdots \exists y_n\, B(\bar{x}, \bar{y})$

$\exists\forall, \ldots, \forall\exists\forall, \ldots$, usw.

Die $\exists$-Formeln besitzen eine nützliche Eigenschaft; sie bleiben nämlich wahr bei einer Erweiterung des Universums. Das hat eine große Bedeutung z. B. bei theoretischen Untersuchungen der Datenbanken. In der Informatik spielen außerdem die $\exists\forall$- und $\forall\exists$-Formeln eine wichtige Rolle, da sich viele Probleme mit deren Hilfe formalisieren lassen.

Begriff der Ersetzung Stehen die prädikatenlogische Formeln A,C_1,C_2,B in einer Relation $\mathrm{Subst}(A, C_1, C_2, B)$ zueinander, so bedeutet das: A geht durch Ersetzung an einer Stelle des Vorkommens des Teilausdrucks C_1 durch C_2 in den Ausdruck B über.

Satz 3.10 (Ersetzungtheorem für Prädikatenkalkül)
A,B,C_1,C_2 seien Formeln, s, u_1, u_2, t Terme und $\mathfrak{A}$ eine Σ-Struktur, die Modell von $Ax(Id)$ ist. Dann gilt:

1. $\mathrm{Subst}(s, u_1, u_2, t)$ *und* $\mathfrak{A} \models u_1 = u_2$, *so* $\mathfrak{A} \models s = t$.
2. *Wenn* $\mathrm{Subst}(A, u_1, u_2, B)$ *und* $\mathfrak{A} \models u_1 = u_2$, *so* $\mathfrak{A} \models A \leftrightarrow B$.
3. *Wenn* $\mathrm{Subst}(A, C_1, C_2, B)$ *und* $\mathfrak{A} \models C_1 \leftrightarrow C_2$, *so* $\mathfrak{A} \models A \leftrightarrow B$.

Beweis: (erfolgt induktiv über die Komplexität von s bzw. A)

1. Induktionsanfang: sei $s \in \mathrm{Var}$, dann sind s mit u_1 und t mit u_2 identisch. Ist $\mathfrak{A} \models u_1 = u_2$, dann ist alles gezeigt.

   Induktionsschritt: sei $s := f(v_1, \dots, v_n)$, u_1 Teilterm von s.
   (a) Wenn $u_1 \equiv_i s$, so $t \equiv_i u_2$; da $\mathfrak{A} \models u_1 = u_2 \curvearrowright \mathfrak{A} \models s = t$. ($\equiv_i$ steht dabei für syntaktische Identität.)
   (b) Sei $u_1 \equiv_i s$. O. B. d. A. sei u_1 Teilterm von v_1. Dann gilt $\mathrm{Subst}(v_1, u_1, u_2, t_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathfrak{A} \models v_1 = t_1$; aus $Ax(Id)$ folgt $\mathfrak{A} \models f(v_1, \dots, v_n) = f(t_1, v_2, \dots, v_n)$. Da $f(t_1, v_2, \dots, v_n) \equiv_i t$, so gilt $\mathfrak{A} \models s = t$.

2. (induktiv über A)
   (a) Sei $A := s = t$, u_1 sei Teilterm von s, $\mathrm{Subst}(s, u_1, u_2, s_1)$. Dann folgt nach (1) $\mathfrak{A} \models s = s_1$. Ferner $\mathrm{Subst}(A, u_1, u_2, B)$ also ist $B := s_1 = t$.
   Es gilt dann $\mathfrak{A} \models s = t \leftrightarrow s_1 = t$ (aus $Ax(Id)$). $\big[(s = s_1 \wedge s = t) \rightarrow s_1 = t\big]$
   (b) Sei $A := R(v_1, \dots, v_n)$, u_1 Teilterm von v_1 (u_1 Teilterm von A ist trivial), $\mathrm{Subst}(v_1, u_1, u_2, t_1)$, dann gilt nach (1) $\mathfrak{A} \models v_1 = t_1$, $v_1 = t_1 \rightarrow \big(R(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow R(t_1, v_2, \dots, v_n)\big) \in Ax(Id)$. Nach Modus Ponens folgt dann $\mathfrak{A} \models R(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow R(t_1, \dots, v_n)$.
   (c) Die verbleibenden Schritte zeigt man analog zum Ersetzungtheorem für Aussagenkalkül unter Verwendung von (1).

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln kann man in Ag=allgemeingültige, Ef=erfüllbare Formeln und Kd=Kontradiktionen einteilen.

Beispiele: Ag: $\forall x \Big(P(x) \vee \neg P(x)\Big)$ ist allgemeingültig.
Es gilt: $Ag(AK) \subsetneqq Ag(PK)$. Z. B. $\forall x\, P(x) \to \exists\, P(x) \in Ag(PK) \setminus Ag(AK)$.

Ef: 1. Es ist zu entscheiden, ob die Formel

$$\forall x \neg\exists y_1 \exists y_2 \big(y_1 \neq y_2 \wedge f(y_1) = x \wedge f(y_2) = x\big) \wedge \\ \exists x \neg \exists y \big(f(y) = x\big) \wedge \forall x \exists y \big(f(x) = y\big)$$

erfüllbar ist. Sei $\mathfrak{A} = (U, \dots)$ algebraische Struktur, in der dies zutrifft. Dann soll die Funktion $f : U \to U$ sowohl nicht surjektiv, als auch injektiv sein, wobei jedes Element von U ein Bild hat. Aus diesen Eigenschaften ergibt sich notwendigerweise ein unendliches Modell.

2. $F(x) := P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$.

Behauptung: Es existiert ein Modell $\mathfrak{A} = (U, P)$ mit einem einstelligen Prädikat $P \subseteq U$, so daß es eine Belegung $\nu : \mathrm{Var} \to U$ mit $\mathfrak{A} \vDash_\nu F(x)$ gibt.

Es muß ein y geben mit $\neg P(y) \curvearrowright P \neq \emptyset$, $U \setminus P \neq \emptyset$. Weiter konstruiert man eine erfüllende Belegung mit $\nu(x) \in P$. Zu finden ist nun eine Belegung μ, $\mu =_y \nu$ mit $\mu(y) \in U \setminus P$. D. h. die Formel ist erfüllbar im Sinne der Belegungserfüllung, aber nicht im Sinne eines Modells.

3. $\forall x\, P(x) \wedge \exists y \neg P(y)$, $\quad P(x) \wedge \neg P(x)$.

Bei dem Beweis der Allgemeingültigkeit einer prädikatenlogischen Formel oder bei der Untersuchung, ob eine Formel aus einer Menge von Formeln folgt, ist es im Gegensatz zum Aussagenkalkül nicht möglich, die immense Anzahl der Strukturen (Modelle) und aller Belegungen dieser durch Tabellen darzustellen. Dafür brauchen wir den Begriff des syntaktischen Ableitens für den Prädikatenkalkül und folglich ein neues Axiomensystem für Quantoren.

3.4 Ableitbarkeit und Beweisbarkeit

IDEE: Angabe einer Menge von Formeln $Ax(PK)$, eines Regelsystems $\mathcal{R}$ bestehend aus Schlußregeln R_1,R_2,R_3, so daß gilt:

$$X \vDash F \iff X \cup Ax(AK) \vdash_{\mathcal{R}} F$$

Def 3.18 ($Ax(PK)$) *Seien A, B, C beliebige prädikatenlogische Formeln. Dann wird $Ax(PK)$ durch folgende drei Axiomengruppen bestimmt:*

1. *Aussagenlogische Axiome (wie $Ax(AK)$)*

2. *Axiome für die Quantoren:*

(a) $\forall x\,(A \to B) \to (\forall x\,A \to B)$

(b) $\forall x\,(A \to B) \to (A \to \forall x\,B)$, *$x$ ist nicht frei in A.*

(c) $\forall x\,A(x) \to A(x/t)$, *$t$ ist ein Term, dessen Variablen an keiner Stelle, an der x vorkommt, gebunden sind.*

(d) $\exists x\,A(x) \longleftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$

(e) $A \to A^*$, *A^* ist eine gebundene Umbenennung von A.*

Beispiel: $\forall x\,(P(x) \vee Q(y)) \to \forall z\,(P(z) \vee Q(y))$

3. *Identitätsaxiome:*

(a) $x = x$

(b) *für alle $f, R \in \Sigma$ gilt:*

$$x = y \longrightarrow \Big(f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)\Big), \quad n = \mathrm{ar}(f),\ i = 1, \dots, n$$

$$x = y \longrightarrow \Big(R(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m) \leftrightarrow R(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_m)\Big), \quad m = \mathrm{ar}(R),\ i = 1, \dots, m$$

Schlußregeln:

$$\frac{A \qquad A \to B}{A} \qquad\qquad \frac{A}{\forall x\,A(x)} \qquad\qquad \frac{A}{A^*}$$

Modus Ponens — x ist vollfrei — A^* ist eine freie Umbenennung von A.

Def 3.19 *Sei $X \subseteq Fm(\Sigma)$, $X^\vdash$ ist die kleinste Menge von Formeln, die $Ax(PK) \cup X$ enthält und abgeschlossen ist gegenüber den Regeln des Modus Ponens, der Generalisierung und der Regel der freien Umbenennung.*

Bemerkung: Die Regel $\to$ heißt abgeschlossen, wenn gilt: aus $A \to B$ und $A \in X^\vdash$ folgt $B \in X^\vdash$.

Sei $X \vDash F$ genau dann, wenn $F \in X^\vdash$, $X \subseteq Fm$. Dann entspricht der Operator $()^\vdash$ einer Funktion von der Menge $\mathrm{Pow}(Fm)$ in $\mathrm{Pow}(Fm)$.

Satz 3.11 *Es gelten folgende Beziehungen*

1. $X \subseteq X^\vdash$

2. *Wenn $X \subseteq Y$, so $X^\vDash \subseteq Y^\vdash$ (Monotonie)*

3. *$(X^{\vdash})^{\vdash} \subseteq X^{\vdash}$ (Idempotenz)*

4. *Wenn $X \vDash F$, so existiert eine endliche Menge $Y \subseteq X$, so daß $Y \vdash F$ (Endlichkeitssatz)*

Der Beweis ergibt sich einfach aus der Definition von $^{\vDash}$, denn wir betrachten Ableitungen und keine Folgerungen (Vergleiche zum Endlichkeitssatz für das inhaltliche Schließen).

Satz 3.12 *Seien A, B Formeln, $X \subseteq Fm(PK)$.*

1. *Wenn $X \vdash A \to B$, so $X \cup \{A\} \vDash B$ (Ableitungstheorem)*

2. *A sei eine Aussage und es gelte $X \cup \{A\} \vdash B$, so folgt $X \vdash A \to B$ (Deduktionstheorem).*

3. *Wenn $X \vdash A(c)$, $c \notin \mathrm{Const}(X)$, so $X \vdash \forall x\, A(x)$*

Beweis:

1. Wenn $X \vdash A \to B$, so $X \cup \{A\} \vdash A \to B$ (nach Monotonie). Inklusion ergibt: $X \cup \{A\} \vdash A$. Nach Modus Ponens folgt $X \cup \{A\} \vdash B$.

2. Es sei $\Delta = \{C/X \vdash A \to C\}$. Es genügt zu zeigen, daß $(X \cup \{A\})^{\vdash} \subseteq \Delta$. Nach Voraussetzung gilt nämlich $B \in \{X \cup \{A\})^{\vdash}$. Hieraus folgt $B \in \Delta$ und nach Definition gilt dann $X \vdash A \to B$.

   (a) Zunächst ist $X \cup \{A\} \cup Ax(PK) \subseteq \Delta$.

      i. Es ist $A \in \Delta$, da $X \vdash A \to A$

      ii. $B \in X \cup Ax(PK)$, dann gilt nach Definition von $\vdash$ $X \vdash B$ und wegen $X \vdash B \to (A \to B)$, nach Modus Ponens folgt $X \vdash A \to B$.

   (b) Das Problem reduziert sich nun darauf, zu zeigen, daß Δ abgeschlossen ist gegenüber drei obigen Regeln. Wegen Monotonie folgt dann die Behauptung. Δ ist abgeschlossen gegen Modus Ponens. Es sei $C \in \Delta$, $C \to D \in \Delta$, zu zeigen $D \in \Delta$. Nach Definition von Δ gilt: $X \vdash A \to C$, $X \vdash A \to (C \to D)$. Es ist aber

   $$Ax(AK) \vdash \Big(A \to (C \to D)) \to ((A \to C) \to (A \to D))\Big)$$

   Nach Modus Ponens $X \vdash (A \to C) \to (A \to D)$. Nochmalige Anwengung von Modus Ponens ergibt: $X \vdash A \to D \quad \curvearrowright D \in \Delta$.

   (c) Δ ist abgeschlossen gegenüber Generalisierung.

   Sei $C \in \Delta$, dann $X \vdash A \to C$, A ist eine Aussage. Durch eine Folge gebundener Umbenennungen kann man sichern, daß jede in C auftretende freie Variable vollfrei ist und in A nicht vorkommt.

   Es sei $x \in \mathrm{fvar}(C)$; nach Generalisierung gilt: $X \vDash \forall x\,(A \to C)$ und man erhält nach den Quantorenregeln $(Ax(Q))$ $X \vDash A \to \forall x\, C(x) \quad \curvearrowright \forall x\, C(x) \in \Delta$.

3. Sei $X \vdash A(c)$, $c \notin \text{Const}(X)$, so $X \models \forall x\, A(x)$.

   Sei $X \models_0 A(c)$, so $A(c) \in X \cup Ax(PK) \curvearrowright A(c) \in Ax(PK)$, dann $\forall x\, A(x) \in Ax(PK)$ und $X \models \forall x\, A(x)$.

   Induktionsschritt: $X \vdash_{n+1} A(c)$. Drei Fälle sind möglich, wir zeigen nur den ersten für den Modus Ponens.

   (a) Es existiert eine Formel B, $X \vdash_n B$, $X \vdash_n B \to A(c)$.
   Nach Induktionsvoraussetzung: $X \vdash \forall x\, (B \to A(x)) \curvearrowright X \vdash B \to \forall x\, A(x) \curvearrowright$ (nach Modus Ponens) $X \vdash \forall x\, A(x)$

$\square$

Def 3.20 *Eine Menge X von Formeln heißt*

1. syntaktisch widerspruchsfrei *(oder* syntaktisch konsistent*), wenn $X^{\vdash} \neq Fm$ ist.*

2. syntaktisch widerspruchsvoll *(oder* syntaktisch inkonsistent*), wenn $X^{\vdash} = Fm$ ist.*

3. klassisch widerspruchsfrei *(oder* klassisch konsistent*), wenn keine Formel A mit $X \vdash A, \neg A$ existiert.*

4. klassisch widerspruchsvoll *(oder* klassisch inkonsistent*), wenn X nicht klassisch konsistent ist.*

Satz 3.13 *Eine Menge X von Formeln ist genau dann syntaktisch konsistent, wenn X klassisch konsistent ist.*

Beweis:

($\to$) X sei syntaktisch inkonsistent; dann gilt $X^{\models} = Fm$ und damit ist X klassisch inkonsistent, denn wenn jede Formel aus X ableitbar ist, so auch insbesondere A und $\neg A$.

($\leftarrow$) X sei klassisch inkonsistent, dann existiert ein A: $X \models A, \neg A$. Es gilt:

$$Ax(PK) \vdash A \to (\neg A \to B), \qquad Ax(PK) \vdash (A \wedge \neg A) \to B$$

Folglich gilt $X \vdash A, \neg A \curvearrowright X \vdash A \wedge \neg A \curvearrowright$ nach Modus Ponens $X \vdash B$. Da B beliebig, so $X^{\vdash} = Fm(PK)$.$\square$

Satz 3.14 *A sei eine Aussage, $X \subseteq Fm(PK)$. Dann gilt $(X \cup \{A\})^{\vdash} = Fm(PK)$ genau dann, wenn $X \vdash \neg A$.*

Beweis: Sei $(X \cup \{A\})^{\vdash} = Fm(PK)$, dann gilt $X \cup \{A\} \vdash \neg A$ und nach dem Deduktionstheorem folgt: $X \vdash A \to \neg A$. Da $X \vdash (A \to \neg A) \to \neg A$, so nach Anwendung des Modus Ponens $X \vdash \neg A$.

Wenn $X \vdash \neg A$, so ist $X \cup \{A\} \vdash A \wedge \neg A$. Dann folgt nach vorangegangenem Satz $(X \cup \{A\})^{\vdash} = Fm(PK)$.□

Satz 3.15 (Korrektheitssatz) *Sei $X \subseteq Fm(PK)$, dann gilt:*

$$\textit{Wenn} \quad X \vdash A, \quad \textit{so} \quad X \vDash A$$

Beweis: (über die Ableitungsstufe)
Es genügt zu zeigen $\bigcup_{n \leq \omega} X^{\vDash_n} \subseteq X^{\vDash}$.

1. Ist $X \vdash_0 A$, dann $A \in Ax(PK) \cup X$.
   Wenn $A \in X$, so $X \vDash A$, wenn $A \in Ax(PK)$, dann ist A allgemeingültig, d. h. $\emptyset \vDash A$ und wegen Monotonie von der Folgerungsbeziehung $X \vDash A$.
2. Sei $X \vdash_{n+1} A$.
   (a) A wird durch Modus Ponens abgeleitet: d. h. es gibt eine Formel B, so daß $X \vdash_n B, B \to A$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $X \vDash B, B \to A$ $\curvearrowright$ $X \vDash A$ (nach Modus Ponens für $\vDash$).
   (b) Generalisierung: sei $A = \forall x\, B(x)$. Es existiert $B(x)$, x ist vollfrei mit $X \vdash_n B(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $X \vdash B(x) \quad \curvearrowright X \vDash \forall x\, B(x)$.

□

3.5 Der Vollständigkeitssatz

Satz 3.16 *Sei $X \subseteq Fm(PK)$. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent:*

1. *$X \vdash A$ genau dann, wenn $X \vDash A$.*
2. *$\mathrm{Mod}(X) \neq \emptyset$ genau dann, wenn X syntaktisch konsistent ist.*

Beweis:

(1) $\to$ (2): es gelte die Beziehung (1)

(a) Sei $\mathrm{Mod}(X) \neq \emptyset$. Angenommen, X ist syntaktisch inkonsistent, dann gilt insbesondere $X \vdash A \wedge \neg A$ und wegen (1) folgt $X \models A \wedge \neg A \quad \curvearrowright \mathrm{Mod}(X) = \emptyset$. Widerspruch

(b) Sei X syntaktisch konsistent. Angenommen, $\mathrm{Mod}(X) = \emptyset$. Dann folgt $X \vDash A \wedge \neg A$. Wegen (1) $X \vdash A \wedge \neg A \quad \curvearrowright X^{\vDash} = Fm(PK)$, d. h. X ist syntaktisch inkonsistent. Widerspruch.

(2) $\to$ (1): es gelte die Beziehung (2)

(a) Sei $X \vDash A$. Nach dem Generalisierungstheorem für $\vDash$ gilt: $X \vDash \mathrm{Gen}(A)$ ($\mathrm{Gen}(A)$ ist wie folgt erklärt: für $A := B(x_1, \ldots, x_k)$ ist $\mathrm{Gen}(A) = \forall x_1 \cdots \forall x_k\, B(x_1, \ldots, x_k)$).
Angenommen, $X \nvdash \mathrm{Gen}(A)$. Dann ist $X \cup \{\neg \mathrm{Gen}(A)\}$ syntaktisch konsistent. Folglich besitzt $X \cup \{\neg \mathrm{Gen}(A)\}$ nach (2) ein Modell, und damit gilt $X \not\models Gen(A)$, das ist ein Widerspruch zur Annahme. Also folgt $X \vdash \mathrm{Gen}(A)$ und nach Axiom (3) von Ax(Q) schließlich $X \vdash A$.

(b) Wenn $X \vdash A$, so folgt nach dem Korrektheitssatz die Beziehung $X \models A$.

Def 3.21 *X sei Menge von Formeln.*

1. *Eine Menge $Z \subseteq Tm(\Sigma)$ von variablenfreien Termen heißt* Zeugenmenge *für X, falls für jede Formel $A(x)$, x vollfrei, ein Term $t \in Z$ existiert, so daß $X \vdash \exists x\, A(x) \to A(x/t)$ ist (Zeuge t belegt die Existenz von x).*

   X heißt HENKIN-*Theorie, wenn X eine Zeugenmenge besitzt.*

2. *Ein Modell $\mathfrak{A} \vDash X$ heißt* kanonisches Modell, *wenn jedes Element $a \in U(\mathfrak{A})$ Interpretation eines variablenfreien Terms $t \in Tm(\mathrm{sgt}(X))$ ist.*

3. *Für eine Menge C von Konstanten sei $\Sigma(C)$ die Erweiterung der Signatur Σ, die durch*
$$\mathbb{K}(\Sigma(C)) = \mathbb{K}(\Sigma) \cup C \quad \textit{und} \quad \mathbb{K}(\Sigma) \cap C = \emptyset$$
   gegeben ist.

Lemma 3.1 *X sei ein syntaktisch konsistente Menge von Formeln der Signatur Σ. Dann existiert eine Signatur $\Sigma(C)$, $C \cap \mathbb{K}(\Sigma) = \emptyset$, und eine Menge $X^* \subseteq Fm(\Sigma(C))$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$X \subseteq X^*$, X^* ist syntaktisch widerspruchsfrei,*

2. *X^* ist eine* HENKIN-*Theorie.*

Beweis: Σ sei abzählbar, C sei eine beliebige abzählbare Menge von Konstanten, so daß $\mathbb{K}(\Sigma) \cap C = \emptyset$. Für eine Variable x (im folgenden fixiert) sei $\Omega(X) = \{A/\mathrm{fvar}(A) = \{x\}, x \text{ ist vollfrei in } A, A \in Fm(\Sigma(C))\}$.

Gegeben seien eine Numerierung der Konstanten $C = \{c_m/m \in \mathbb{N}\}$ und eine Numerierung der Formeln $\Omega(X) = \{A_m(x)/m \in \mathbb{N}\}$. Ziel: induktive (rekursive) Konstruktion von Folgen:

1. $X = X_0, X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$

2. $d_0, d_1, \ldots, d_m, \ldots \quad m \in \mathbb{N},\ d_i \in C$,

so daß gilt:

(a) X_m ist syntaktisch konsistent, $m \in \mathbb{N}$,

(b) Wenn $n = m + 1$, so $X_n = X_m \cup \{\exists x\, A_m(x) \to A_m(d_m)\}$

Anfangsschritt ist gegeben;
Induktionsschritt: $X_0, \ldots, X_m, d_0, \ldots, d_{m-1}$ seien bereits konstruiert und erfüllen (a) und (b). d_m sei das erste Element der Folge $\{c_k / k \in \mathbb{N}\}$, das nicht in X_m vorkommt und es gelte

$$X_{m+1} = X_m \cup \{\exists x\, A_m(x) \to A(d_m)\}$$

Die Bedingung (b) ist trivialerweise erfüllt. Es bleibt zu zeigen, X_{m+1} ist syntaktisch konsistent.

Nach Induktionsvoraussetzung ist X_m syntaktisch konsistent. Angenommen, X_{m+1} ist syntaktisch inkonsistent. $X_{m+1} = X_m \cup \{\exists x\, A_m(x) \to A(d_m)\}$ ist inkonsistent (nach Satz 3.14) genau dann, wenn $X_m \vdash \neg(\exists x\, A_m(x) \to A(d_m))$. Hieraus folgt: $X_m \vdash \exists x\, A_m(x) \wedge \neg A(d_m)$.

Sei y eine Variable, die nicht in $A_m(x)$ vorkommt. Da die Konstante d_m nicht in x_m vorkommt, so folgt nach Satz 3.12 $X_m \vdash \forall y\, (\exists x\, A_m(x) \wedge \neg A_m(y))$. Unter Verwendung einer Verschiebungsregel gilt: $X_m \vDash \exists x\, A_m(x) \wedge \forall y \neg A_m(y)$. Nach einer gebundenen Umbenennung y/x folgt $X_m \vDash \exists x\, A_m(x) \wedge \forall x \neg A_m(x) \curvearrowright X_m \vDash \exists x\, A_m(x) \wedge \neg \exists x\, A_m(x)$ $\curvearrowright$ X_m ist klassisch inkonsistent und damit auch syntaktisch inkonsistent (Widerspruch zur syntaktischen Konsistenz von X_m).

Die gesuchte Formelmenge X^* können wir nun mittels Vereinigung aller X_i, $i \in \mathbb{N}$ gewinnen: $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_i$. Dann gilt: X^* ist syntaktisch konsistent.

Angenommen, X^* wäre syntaktisch inkonsistent. Es gibt dann eine Formel F mit $X^* \vdash F \wedge \neg F$ und nach Endlichkeitssatz für das Ableiten existiert eine endliche Teilmenge $Y \subseteq X^*$, so daß $Y \vdash F \wedge \neg F$, d. h. es existiert ein n mit $Y \supseteq X_n$. Hieraus folgt: X_n ist syntaktisch inkonsistent, und das ist ein Widerspruch zum gerade Bewiesenen.

Es bleibt nur einen abschließenden Punkt zu betrachten: X^* ist eine Henkin-Theorie.

Sei $B(y) \in Fm(\Sigma(C))$, y ist in B vollfrei und $fvar(B) = \{y\}$. Zunächst sei $y \neq x$ (x ist die Konstruktionsvariable). $B^*(y)$ ist eine gebundene Umbenennung, so daß x in $B^*(y)$ nicht vorkommt.

Sei $C(x) := B^*(y/x)$. $C(x)$ tritt in der Aufzählung von $\Omega(x)$ auf; es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $C(x) = A_n(x)$. Dann gilt nach Konstruktion von X_{n+1}

$$\exists x\, C(x) \to C(d_m) \in X^*$$

Durch Umbenennung erhält man schließlich $X^* \vdash \exists y\, B(y) \to B(d_m)$ (d. h. C kann als Zeugenmenge gewählt werden).$\square$

Lemma 3.2 *X sei eine syntaktisch konsistente Menge von Formeln der Signatur Σ. Dann existiert eine maximale syntaktisch konsistente Erweiterung $X^* \supseteq X$ der Signatur Σ, und es gilt:*

1. *$A \notin X^*$ genau dann, wenn $\neg A \in X^*$*

2. $A \wedge B \in X^*$ *genau dann, wenn* $\{A, B\} \subseteq X^*$

3. $A \vee B \in X^*$ *genau dann, wenn* $\{A, B\} \cap X^* \neq \emptyset$

4. $A \to B \in X^*$ *genau dann, wenn* $\{\neg A, B\} \cap X^* \neq \emptyset$

Beweis analog wie bei dem Aussagenkalkül.

Lemma 3.3 (Hauptlemma für den Vollständigkeitssatz)
Wenn X *eine syntaktisch konsistente Menge und eine* HENKIN-*Theorie ist, dann besitzt* X *ein kanonisches Modell.*

Beweis: Idee von GÖDEL: das gesuchte Modell wird aus dem sprachlichen Material konstruiert.

Nach vorangegangenem Lemma 3.2 existiert eine maximale konsistente Erweiterung $X^* \supseteq X$ mit

1. X^* ist HENKIN-Theorie
2. $A \notin X^*$ genau dann, wenn $\neg A \in X^*$
3. $A \wedge B \in X^*$ genau dann, wenn $\{A, B\} \in X^*$
4. $A \vee B \in X^*$ genau dann, wenn $\{A, B\} \cap X^* \neq \emptyset$
5. $A \to B \in X^*$ genau dann, wenn $\{\neg A, B\} \cap X^* \neq \emptyset$

Sei $Tm(\Sigma)$=Menge der variablenfreien Terme von Σ. Für eine Abbildung $\mu : \mathrm{Var} \to Tm$, $A \in Fm(\Sigma)$ sei $A[\mu]$ diejenige Formel, die aus A entsteht, indem x durch $\mu(x)$ ersetzt wird (definiert durch $A[\bar{x}/\mu]$).

Für $s, t \in Tm$ wird eine Relation $\sim$ festgelegt: $t \sim s$ genau dann, wenn $(t = s) \in X^*$. Es gilt: $Ax(Id) \subseteq (X^*)^{\vDash}$. Hieraus folgt, daß $\sim$ eine Kongruenzrelation auf Tm ist, d. h. es gilt Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Kongruenzeigenschaften (Unabhängigkeit vom Repräsentanten).

Nun konstruieren wir in zwei Schritten ein Modell für X^*.

1. Schritt: Sei $\mathfrak{A} = (U(\mathfrak{A}), (f^{\mathfrak{A}})_{f \in \mathbb{F}}, (R^{\mathfrak{A}})_{R \in \mathbb{R}})$, so daß

1. $U(\mathfrak{A}) = Tm$
2. $f^{\mathfrak{A}}(s_1, \ldots, s_n) = f(s_1, \ldots, s_n)$
3. $(t_1, \ldots, t_m) \in R^{\mathfrak{A}}$ gdw. $R(t_1, \ldots, t_m) \in X^*$

2. Schritt: Sei $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_{/\sim}$ (Faktorstruktur), $U(\mathfrak{A}^*) = \{[t]/t \in Tm\}$, $[t] = \{s/s \sim t\}$, $f^{\mathfrak{A}^*}([s_1], \ldots, [s_n]) =_{df} [f^{\mathfrak{A}}(s_1, \ldots, s_n)]$

Behauptung: $\mathfrak{A}^*$ ist ein Modell für X^*.

Für den Beweis genügt es folgende Bedingung $(*)$ zu beweisen:

$$\mathfrak{A} \models_\mu A \iff A[\mu] \in X^* \qquad (*)$$

Anfangsschritt: Sei $A := s = t$, s, t Terme. $\mathfrak{A} \models_\mu s = t$ gdw. $\mu(s) \sim \mu(t)$ (nach Definition) gdw. $\mu(s) = \mu(t) \in X^*$ gdw. $(s = t)[\mu] \in X^*$.

Sei $A := R(t_1, \ldots, t_m)$, $t_1, \ldots, t_m \in Tm$. $\mathfrak{A} \models_\mu R(t_1, \ldots, t_m)$ gdw. $(\mu(t_1), \ldots, \mu(t_m)) \in R^{\mathfrak{A}}$, hieraus folgt $R(\mu(t_1), \ldots, \mu(t_m)) \in X^*$.

Induktionsschritt: Sei $A := \neg B$. Dann gilt der Reihe nach: $\mathfrak{A} \models_\mu \neg B$ gdw. $\mathfrak{A} \not\models_\mu B$ gdw. $B[\mu] \notin X^*$ (wegen $(*)$) gdw. $\neg B[\mu] \in X^*$ (nach Eigenschaften von X^*).

Analog zeigt man die entsprechenden Beziehungen für die restlichen aussagenlogischen Verknüpfungen. Für Quantoren gilt:

Sei $A := \exists x B(x)$.

($\rightarrow$) $\mathfrak{A} \models_\mu \exists x\, B(x)$. Dann existiert eine Belegung ν mit $\nu =_x \mu$, so daß $\mathfrak{A} \models_\nu B(x)$. Nach Induktionssvoraussetzung folgt $B[\nu] \in X^*$.
$X^* \models B[\nu] \rightarrow \exists x\, B(x)[\mu] \curvearrowright X^* \models \exists x\, B(x)[\mu]$.

($\leftarrow$) Sei $\exists x\, B(x)[\mu] \in X^*$. Da X^* eine Henkin-Theorie ist, so existiert eine Belegung $\nu =_x \mu$, so daß $X^* \vdash \exists x\, B(x)[\mu] \rightarrow B(x)[\nu] \curvearrowright$ (nach Modus Ponens) $B(x)[\nu] \in X^*$. Nach Induktionssvoraussetzung folgt dann $\mathfrak{A} \models_\nu B(x)$ $\curvearrowright \mathfrak{A} \models \exists x\, B(x)[\mu]$.

Den Allquantor $\forall$ kann man auf den Existenzquantor $\exists$ zurückführen ($\forall x\, B(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \neg B(x)$).□

Satz 3.17 *X sei eine syntaktisch konsistente Menge von Formeln. Dann besitzt X ein Modell.*

Beweis: (unter Benutzung des Hauptlemmas)

1. Konstruktion von $X_1 \supseteq X$, X_1 ist Henkin-Theorie.
2. Konstruktion von $X^* \supseteq X_1$, X^* ist maximal konsistent.

Nach dem Hauptlemma besitzt X^* (und damit X) ein kanonisches Modell (d. h. jedes Individuum hat einen Namen).□

Satz 3.18 (Vollständigkeitssatz) *Für jede Menge X von Formeln, $A \in Fm(\Sigma)$, gilt:*

1. *$X \models A$ gdw. $X \models A$ (der starke Vollständigkeitssatz).*
2. *Wenn jede endliche Teilmenge von X ein Modell besitzt, dann hat X ein Modell (*Kompaktheitssatz*).*

3. *Die Menge Ag der logisch gültigen Formeln des $PK1$ (PK der 1. Stufe) ist rekursiv aufzählbar.*

Beweis:

(2) Jede endliche Teilmenge von X besitzt ein Modell, d. h. ist syntaktisch konsistent. Somit ist X selbst syntaktisch konsistent ist, und folglich hat X ein Modell.

(3) $F \in Ag$ gdw. $\emptyset \models F$ gdw. $\models F$ gdw. $Ax(PK) \cup Ax(Id) \models_R F$ (ableitbar mittels Regeln des PK). Um nun zu beweisen, daß Ag semientscheidbar ist (oder rekursiv aufzählbar) genügt es zu zeigen: $Ax(PK) \cup Ax(Id)$ sowie das Regelsystem R sind entscheidbar. Dies gilt aber. (Z. B. für Modus Ponens: $(F, G, H) \in M.p. \Leftrightarrow G = F \to H$).$\Box$

Beispiel:

1. Beschreibung der Wissensbasis (des abstrakten Modells) für die natürlichen Zahlen $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, s, <)$, s ist die Nachfolgerfunktion.

   Sei PA die Menge der Axiome von Peano, $T_N = \{F / \mathcal{N} \models F\}$. Zu untersuchen wären folgende Fragen:

   - ist PA vollständig?
   - ist das Optimum $T_N = \{F / PA \models F\}$ erreicht?

   Die Peanoschen Axiome gelten in $\mathcal{N}$, d. h. $\{F / PA \models F\} \subseteq T_N$. Die umgekehrte Relation gilt aber nicht (Unvollständigkeitssatz von Gödel). Ferner ist T_N nicht rekursiv aufzählbar, deshalb existiert keine Axiomatisierung des Objektbereiches $\mathcal{N}$.

2. Sei T_N definiert wie oben, c sei eine Konstante mit $c \notin \mathrm{sgt}(T_N)$. Die Terme $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, $\ldots$ bezeichne man als 1, 2, 3, usw. Weiter sei $X = \{(n < c) / n \in \mathbb{N}\}$.

   Problem: Ist $T_N \cup X$ widerspruchsfrei (syntaktisch konsistent)?

   Behauptung: jede endliche Teilmenge von $T_N \cup X$ ist konsistent.

   Sei $X_f \subseteq T_N \cup X$ endlich. O. B. d. A. möge X_f die folgende Gestalt haben: $X_f = T_N \cup X_1$, $X_1 \subseteq X$, X_1 endlich.

   Sei n_0 die größte natürliche Zahl, die in den Ungleichnungen, die in X_1 enthalten sind, vorkommt:
   $m_1 < c$, $m_2 < c$,$\ldots$,$m_k < c$, $m_k = n_0$, $m_1 < \cdots < m_k$. Damit haben wir für X_f ein Modell gefunden, nämlich $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <, c^\delta)$, wobei $c^\delta =_{df} n_0 + 1$.

   Hieraus folgt $T_N \cup X$ ist syntaktisch konsistent und besitzt daher ein Modell $\mathcal{M}$. In $\mathcal{M}$ ist c^δ eine Zahl, die die Eigenschaft hat $n < c^\delta$, $n \in \mathcal{N}$.

3.6 Definierbarkeit und Interpretierbarkeit

Def 3.22 (Explizite Definierbarkeit) *Gegeben sei eine Signatur* $\Sigma = (\mathbb{F}, \mathbb{R}, \mathbb{K})$ *unds eine* Σ*-Struktur* $\mathfrak{A} = (U, (F^{delta})_{f\in\mathbb{F}}), (R^{\delta})_{R\in\mathbb{R}}, (c^{\delta})_{c\in\mathbb{K}})$. *Sei* $\overline{R} \subseteq U^n$ *eine n-stellige Relation in* $\mathfrak{A}$. $\overline{R}$ *heißt definierbar in* $\mathfrak{A}$, *wenn eine Formel* $F(x_1, \dots, x_n) \in Fm(\Sigma)$ *existiert, so daß gilt* $(a_1, \dots, a_n) \in \overline{R}$ *gdw.* $\mathfrak{A} \models f[a_1, \dots, a_n]$. *Sei* $R \notin \Sigma$, *dann heißt die Formel* $R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow F(x_1, \dots, x_n)$ *eine explizite Definition des Relationssymbols* R *(wir notieren diese Formel auch durch* $R(x_1, \dots, x_n) =_{df} F(x_1, \dots, x_n)$*).*

Sei $T \subseteq Fm(\Sigma)$ *und* $R \notin \Sigma$, $D(x_1, \dots, x_n) \in Fm(\Sigma)$. *Dann heißt* $T \cup \{R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow D(x_1, \dots, x_n)$ *eine definitorische Erweiterung der Theorie* T.

$f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow D(x_1, \dots, x_n, y)$ *ist eine explizite Funktionsdefinition in* T, *wenn* $f \notin \Sigma$ *und* $T \models \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y D(x_1, \dots, x_n, y)$ *und* $T \models \forall x_1 \dots \forall x_n \forall u \forall v (D(x_1, \dots, x_n, u) \wedge D(x_1, \dots, x_n, v) \rightarrow u = v)$.

$c = x \leftrightarrow D(x)$ *ist eine Konstantendefinition in* T, *wenn* $c \notin \Sigma$ *und* $T \models \exists D(x) \wedge$ / $\exists x_1 \exists x_2 (\not x_1 = x_2 \wedge D(x_1) \wedge D(x_2))$.

3.7 Übungen

4 Unentscheidbarkeit und Unvollständigkeit

5 Universale Theorien und Logikprogrammierung

5.1 Grundlegende Eigenschaften

Eine Formel F heißt *universal*, wenn sie pränex ist und nur $\forall$-Quantoren besitzt. Eine universale Theorie (oder *offene* Theorie) ist eine Menge von universalen Formeln. Universale sind grundlegend für die logische Programmierung.

Beispiel: Programmiersprache *Prolog* (basiert auf Beschreibungen von Sachverhalten).

Universale Formel (auch $\forall$-Formeln) sind *abwärtsstabil.* Dies besagt der folgende

Satz 5.1 (Persistenz universaler Sätze[5])

Es sei $\forall x_1 \cdots \forall x_m\, A(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = B(y_1, \dots, y_n)$ *eine* $\forall$*-Formel der Signatur* Σ, A *quantorfrei.*

$\mathfrak{A}$ *sei eine* Σ*-Struktur,* $\mathfrak{A} \vDash_{\mu} B(y_1, \dots, y_n)$, $\mu(y_1) = a_1, \dots, \mu(y_n) = a_n$ *(diesen Sachverhalt notieren wir im weiteren durch* $\mathfrak{A} \vDash B[a_1, \dots, a_n]$*).*

Ferner sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ *eine Teilstruktur von* $\mathfrak{A}$ *mit* $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq U(\mathfrak{B})$.

Dann gilt: $\mathfrak{B} \vDash_{\mu} B(y_1, \dots, y_n)$.

[5] Den Begriff *Satz* verwenden wir in diesem Kontext synonym zum Begriff *Aussage*; ein Satz ist also eine Formel ohne freien Variablen.

Beweis: Da $B[a_1, \dots, a_n]$ universal ist, so gilt für alle $b_1, \dots, b_m \in U(\mathfrak{A})$: $\mathfrak{A} \models A[b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]$. A enthält keine Quantoren, deshalb gilt die Beziehung $\mathfrak{B} \models A[b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]$ für alle $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $\{b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n\} \subseteq U(\mathfrak{B}) \curvearrowright B \models \forall x_1 \cdots \forall x_m\, A(\bar{x}, a_1, \dots, a_n)$.□

Satz 5.2 *T sei eine Menge von universalen Sätzen einer Signatur Σ,* $\mathrm{Const}(\Sigma) \neq \emptyset$ *und* $\mathrm{Mod}(T) \neq \emptyset$. *Dann besitzt T ein* HERBRAND-*Modell.*

Beweis: Sei $\mathfrak{A} \models T$, $Tm(\mathfrak{A}) = \{t^\delta / t$ variablenfreier Term$\}$, $Tm(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}$, dann gilt: $Tm(\mathfrak{A}) \models T$, $Tm(\mathfrak{A})$ kann als HERBRAND-Modell interpretiert werden.□

Def 5.1 *$\mathfrak{A}$ sei eine Σ-Struktur, $\Sigma = (\mathbb{F}, \mathbb{R})$. Für eine Teilmenge $M \subseteq U(\mathfrak{A})$ sei $\mathbb{K}(\mathfrak{A}, M) = \{c_a / a \in M\}$ bestimmt durch folgende Bedingungen:*

1. *wenn $a \neq b$, so $c_a \neq c_b$,*
2. *$\mathbb{K}(\mathfrak{A}, M) \cap \mathbb{K}(\Sigma) = \emptyset$.*

Wir definieren $\Sigma_{\mathfrak{A}} = \Sigma \cup \mathbb{K}(\mathfrak{A})$, wobei $\mathbb{K}(\mathfrak{A}) = \mathbb{K}(\mathfrak{A}, U(\mathfrak{A}))$ ist.
$(\mathfrak{A}, (c_a)_{a \in M})$ *heißt* Konstanten-Expansion *für M von $\mathfrak{A}$.*
Es seien $P = \{R(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) / a_i \in U(\mathfrak{A})\} \cup \{f(c_{a_1}, \dots, c_{a_m} = a / a_i, a \in U(\mathfrak{A})\}$, $P^* = P \cup \{\neg F / F \in P\}$.
$D(\mathfrak{A}) = \{F / F \in P^*$ und $\mathfrak{A} \models F\}$ heißt das Diagramm *von $\mathfrak{A}$.*

Beispiel: Sei $\mathfrak{A} = (\{0,1,2\}, \leq, =)$, $\mathbb{K}(\mathfrak{A}) = \{c_0, c_1, c_2\}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{A}) = \{ & c_0 = c_0,\ c_1 = c_1,\ c_2 = c_2, \\ & \neg c_0 = c_1, \neg c_0 = c_2, \neg c_1 = c_2, \\ & \neg c_1 = c_0, \neg c_2 = c_0, \neg c_2 = c_1, \\ & c_0 \leq c_0,\ c_1 \leq c_1,\ c_2 \leq c_2, \\ & c_0 \leq c_1,\ c_0 \leq c_2,\ c_1 \leq c_2, \\ & \neg c_2 \leq c_0, \neg c_2 \leq c_1, \neg c_1 \leq c_0\}. \end{aligned}$$

Σ^* entsteht aus Σ, indem jedes in $\mathbb{F}(\Sigma)$ vorkommendes Funktionssymbol f der Stellenzahl n, $n > 0$, durch ein nicht in Σ vorkommendes $(n+1)$-stelliges Relationsssymbol G_f ersetzt wird.
$\mathfrak{B}$ ist *Teilsystem* von $\mathfrak{A}$, wenn gilt:

1. $U(\mathfrak{B}) \subseteq U(\mathfrak{A})$,
2. für jede Relation $R^{\mathfrak{B}}$ gilt: $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \restriction U(\mathfrak{B})$,
3. für jedes Relationssymbol $G_f \in \mathbb{R}(\Sigma^*)$ gilt: $G_f^{\mathfrak{B}} = \mathrm{Gr}(f^{\mathfrak{A}}) \restriction U(\mathfrak{A})$ (Zur Erinnerung: Graph einer n-stelligen Funktion f ist eine $(n+1)$-stellige Relation, die f repräsentiert).

Satz 5.3 *Eine Theorie T ist logisch äquivalent zu einer universalen Theorie genau dann, wenn* $\mathrm{Mod}(T)$ *gegenüber Teilstrukturen abgeschlossen ist (d. h. wenn eine Struktur Modell von T ist, so auch jede Teilstruktur).*

Beweis:

($\rightarrow$) trivial

($\leftarrow$) Sei $\mathrm{Mod}(T)$ abgeschlossen bezüglich Teilstrukturen, $S = \{F/T \models F, F$ ist universal$\}$. Es ist zu zeigen, S ist logisch äquivalent zu T, d. h. $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Mod}(T)$.

Es gilt: $\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(S)$ (trivial). Sei nun $\mathfrak{A} \models S$, $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_0$ endlich; D_0 sei das Diagramm von $\mathfrak{A}_0$.

Für $\mathfrak{A}_0$ läßt sich eine Existenzaussage $\exists\bar{x}\, B(\bar{x})$ angeben, so daß $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \exists\bar{x}\, B(\bar{x})$.

Weiter zeigen wir:

(†) jedes endliche Redukt[6] eines endlichen Teilsystems $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ ist in ein Modell von T einbettbar.

Angenommen, (†) ist bereits bewiesen. Dann ist $T \cup D(\mathfrak{A}_0)$ konsistent, $D(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}, |\mathfrak{A}_0| < \omega} D(\mathfrak{A}_0)$, denn aus $\mathfrak{A}_0 \sqsubset \mathfrak{B} \models T$ folgt $T \cup D(\mathfrak{A}_0)$ ist konsistent, und nach Kompaktheitssatz ist $T \cup D(\mathfrak{A})$ ebenfalls konsistent und folglich besitzt ein Modell $\mathfrak{B}$. Dies ergibt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

$\mathrm{Mod}(T)$ ist nach Voraussetzung abgeschlossen gegen Teilstrukturen $\curvearrowright \mathfrak{A} \models T$.

(†) bleibt zu zeigen: angenomen, es existiert ein endliches Teilsystem $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$, das in kein Modell von T einbettbar ist.

Sei $\exists\bar{x}\, B(\bar{x})$ die das System $\mathfrak{A}_0$ beschreibende Existenzaussage. Dann gilt für alle $\mathfrak{B} \models T$: $\mathfrak{B} \not\models \exists\bar{x}\, B(\bar{x}) \curvearrowright \mathfrak{B} \models \forall\bar{x}\neg B(\bar{x}) \curvearrowright T \models \forall\bar{x}\neg B(\bar{x}) \curvearrowright \forall\bar{x}\neg B(\bar{x}) \in S$ $\curvearrowright$ Widerspruch, denn $\mathfrak{A} \models S$ und damit $\mathfrak{A} \models \forall\bar{x}\neg B(\bar{x})$, da $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$.□

FRAGE: Ist jede Aussage logisch äquivalent zu einer universalen Aussage?

Existenzsätze sind i. a. nicht äquivalent zu universalen Sätzen.

Beispiel: Sei $\mathfrak{A} = (U, P, a)$, $P \subseteq U$ einstelliges Prädikat mit $|P| \geq 2$, $a \in P$. Es gilt: $\mathfrak{A} \models \exists x\,(P(x) \wedge x = a)$.

Wählt man aber $\mathfrak{A}_1 = (U_1, P)$ mit $a \notin U_1$, so $\mathfrak{A}_1 \not\models \exists x\,(P(x) \wedge x = a)$.

[6] Als endliches Redukt von $\mathfrak{A} = (U, \mathbb{R})$ bezeichnet man eine Struktur $(U, \mathbb{R}_1)$, wobei $\mathbb{R}_1$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

5.2 Reduktionstheorie

Satz 5.4 (SKOLEMsches Normalformtheorem) *Zu jeder pränexen Formel F läßt sich effektiv eine universale Formel $F^\forall$ mit denselben freien Variablen konstruieren, so daß gilt:*

1. $\mathrm{sgt}(F) \subseteq \mathrm{sgt}(F^\forall)$, $\mathrm{sgt}(F^\forall) \setminus \mathrm{sgt}(F)$ *enthält nur Funktionssymbole.*
2. *für jede* $\mathrm{sgt}(F^\forall)$*-Struktur* $\mathfrak{A}$ *gilt:* $\mathfrak{A} \models F^\forall \to F$ $(\models F^\forall \to F)$.
3. *zu jeder* $\mathrm{sgt}(F)$*-Struktur* $\mathfrak{A}$ *existiert eine* $\mathrm{sgt}(F^\forall)$*-Expansion* $\mathfrak{A}_0$*, so daß* $\mathfrak{A}_0 \models F^\forall \leftrightarrow F$ *gilt.*

Beweis: (Induktion über die Anzahl der Quantoren)

1. Wenn F keine Quantoren enthält, so $F^\forall =_{df} F$.
2. (a) $F := \forall x\, G(x)$. Dann existiert nach Induktionssvoraussetzung eine universale Formel $G^\forall$, die die Bedingungen (1)–(3) erfüllt. Wenn $F^\forall = \forall x\, G^\forall$, so erfüllt $F^\forall$ die Bedingungen (1)–(3).

   zu (1) ist klar.

   zu (2) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathrm{sgt}(F^\forall)$-Struktur. Dann gilt nach Induktionssvoraussetzung $\mathfrak{A} \models \forall x\,(G^\forall \to G)$. Hieraus folgt $\mathfrak{A} \models \forall x\, G^\forall \to \forall x\, G$, $\mathfrak{A} \models F^\forall \to F$.

   zu (3) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathrm{sgt}(F)$-Struktur. Dann existiert nach Induktionssvoraussetzung eine $\mathrm{sgt}(G^\forall)$-Expansion $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A}_0 \models G^\forall \leftrightarrow G$.
   Da $\mathrm{sgt}(G^\forall) = \mathrm{sgt}(F^\forall)$ gilt, so ist $\mathfrak{A}_0$ auch eine $\mathrm{sgt}(F^\forall)$-Expansion.
   $\mathfrak{A}_0 \models \forall x\,(G^\forall \leftrightarrow G) \curvearrowright \mathfrak{A}_0 \models \forall x\, G^\forall \leftrightarrow \forall x\, G \curvearrowright \mathfrak{A}_0 \models F^\forall \leftrightarrow F$.

   (b) $F := \exists x\, G(x, x_1, \ldots, x_n)$; f sei ein n-stelliges Funktionssymbol, das nicht in F vorkommt und

   $$G_1(x_1, \ldots, x_n) =_{df} G(f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$$

   Nach Induktionssvoraussetzung existiert eine $\forall$-Formel $G_1^\forall(x_1, \ldots, x_n)$, die die Bedingungen (1)–(3) (bezogen auf $G_1(x_1, \ldots, x_n)$ erfüllt.
   Sei $F^\forall =_{df} G_1^\forall(x_1, \ldots, x_n)$.
   Nach Induktionssvoraussetzung gilt:

   i. $\models G_1^\forall(x_1, \ldots, x_n) \to G_1(x_1, \ldots, x_n)$
   ii. für jede $\mathrm{sgt}(G_1)$-Struktur $\mathfrak{A}$ existiert eine $\mathrm{sgt}(G_1^\forall)$-Expanion $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{B} \models G_1^\forall(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G_1(x_1, \ldots, x_n)$.
   Es gilt generell: $\models G(f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) \to \exists x\, G(x, x_1, \ldots, x_n)$ (nach logischen Regeln). Hieraus folgt $\models F^\forall(x_1, \ldots, x_n) \to F(x_1, \ldots, x_n)$.

   (c) $\mathfrak{A}$ sei eine $sgt(F)$-Struktur. Für alle $(a_1, \ldots, a_n) \in U(\mathfrak{A})$ sei

   $$\rho(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \{b / \mathfrak{A} \models G(b, a_1, \ldots, a_n)\}, & \text{falls nicht leer} \\ \{c\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $c \in U(\mathfrak{A})$ beliebig, aber fixiert. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz einer Funktion $f^{\mathfrak{B}}$, so daß $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in \rho(a_1, \ldots, a_n)$ ist. Dann gilt $\mathfrak{B} \models G_1(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists x\, G(x, x_1 \ldots, x_n)$ wegen folgenden Überlegungen:

Sei $a_1, \ldots, a_n \in U(\mathfrak{B}) = U(\mathfrak{A})$. Dann gilt allgemein:
$\mathfrak{B} \models G_1^{\forall}[a_1, \ldots, a_n] \rightarrow \exists x\, G(x, a_1, \ldots, a_n)$. Sei $\mathfrak{B} \models \exists x\, G(x, a_1, \ldots, a_n)$, dann folgt $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in \rho(a_1, \ldots, a_n)$
$\curvearrowright \mathfrak{B} \models G(f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n)$
$\curvearrowright \mathfrak{B} \models G^{\forall}(f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n)\Box$

Beispiel:

$$F := \exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, A(x, y, z, u, v, w)$$

Um den ersten Existenzquantor zu eliminieren, führt man ein neues Konstantensymbol a ein und erhält:

$$\forall y \forall z \exists u \forall v \exists w\, A(a, y, z, u, v, w)$$

Sei nun g eine neue Funktion, die von y und z abhängt. Dann ergibt sich

$$\forall y \forall z \forall v \exists w\, A(a, y, z, g(y, z), v, w)$$

und durch Einführen von h

$$\forall y \forall z \forall v\, A(a, y, z, g(y, z), v, h(y, z, v))$$

$F^{\exists}$ kann man mit Hilfe des $\forall$-Operators bestimmen durch $F^{\exists} = \neg(F^*)^{\forall}$, wobei F^* eine zu F äquivalente pränexe Formel ist. Es gilt dann analog: $\models F \rightarrow F^{\exists}$.

Beispiel: Sei $F^* = \forall x \forall y \forall z\, A(x, y, z)$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \neg F^* &= \neg \forall x \forall y \forall z\, A(x, y, z) = \neg\neg \exists x \neg \forall y \forall z\, A(x, y, z) \\ &= \exists x \neg\neg \exists y \neg \forall z\, A(x, y, z) = \exists x \exists y \exists z \neg A(x, y, z) \end{aligned}$$

Satz 5.5 *Für beliebige pränexe Formeln F ohne freie Variablen gilt:*

1. $\models F$ *gdw.* $\models F^{\exists}$
2. $\mathrm{Mod}(F) \neq \emptyset$ *gdw.* $\mathrm{Mod}(F^{\forall}) \neq \emptyset$

Beweis:

1. Sei $\models F$. Dann gilt für beliebige $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models F \rightarrow F^{\exists}$. Folglich gilt $\mathfrak{A} \models F^{\exists}$, d. h. $\models F^{\exists}$.

   Umgekehrt sei $\models F^{\exists}$. Angenommen, es existiere eine $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A} \not\models F$. Dann existiert eine $\mathrm{sgt}(F^{\exists})$-Expansion $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A}_0 \models F \leftrightarrow F^{\exists}$ $\curvearrowright \mathfrak{A}_0 \not\models F^{\exists}$. Widerspruch zu $\models F^{\exists}$.

2. Sei $\mathrm{Mod}(F) \neq \emptyset, \mathfrak{A} \models F$. Dann existiert eine Expansion $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A}_0 \models F^\forall$, d. h. $\mathrm{Mod}(F^\forall) \neq \emptyset$.

   Wenn $\mathfrak{A} \models F^\forall$, so $\mathfrak{A} \models F$, da $\models F^\forall \to F$.□

Vielfältige Versuche zu zeigen, daß der Prädikatenkalkül entscheidbar wäre, haben zu vielen interessanten Anwendungen geführt. Z. B. im Resolventenkalkül:

Gegeben sei eine prädikatenlogische Formel F. Gilt $\models F$? ($\models F \equiv \mathrm{Mod}(\neg F) = \emptyset$).

$F \to \neg F = G \mapsto G^\forall$, $G^\forall$ ist äquivalent einer endlichen Menge $\mathfrak{A}(G)$ von *Klauseln*. Ziel: man zeige $\mathrm{Mod}(\mathfrak{A}(G))$ hat kein Modell.

Def 5.2 *Σ sei eine Signatur, Σ^* entsteht auf folgende Weise*

1. *für jede Formel $F(x) \in Fm(\Sigma)$, $\mathrm{fvar}(F) = \{x\}$, sei c_F eine Konstante $\notin \Sigma$; es sei $c_F \in \Sigma^*$.*

2. *für jede Formel $F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in Fm(\Sigma)$, $n \geq 1$, sei f_F ein n-stelliges Funktionssymbol, $f_F \notin \Sigma$, $f_F \in \Sigma^*$.*

$$\Sigma^* =_{df} \Sigma, \quad \Sigma^{n+1} = (\Sigma^n)^*, \quad \Sigma^S = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma^n$$

   Σ^s heißt die volle Skolem-Expansion *von Σ.*

   Die Menge $Sk(\Sigma, \Sigma^S)$ sei definiert wie folgt:

   (a) $\exists x\, F(x) \to F(c_F)$

   (b) $\mathrm{Gen}\Big(\exists x_{n+1}\, F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\Big) \to F\big(x_1, \ldots, x_n, f_F(x_1, \ldots, x_n)\big)$

Satz 5.6 *T sei eine Theorie der Signatur Σ und $T^S = T \cup Sk(\Sigma, \Sigma^*)$. Dann erlaubt T^S die Elimination der Quantoren (d. h. für alle Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$ existiert eine quantorfreie Formel $G(x_1, \ldots, x_n)$, so daß $T^S \models F(\bar{x}) \leftrightarrow G(\bar{x})$).*

Def 5.3 *S, T seien Theorien, $sgt(T) \subseteq \mathrm{sgt}(S)$. S heißt* konservative Erweiterung *von T, wenn für alle Formeln $F \in Fm(\mathrm{sgt}(T))$ gilt:*

$$T \models F \iff S \models F$$

Satz 5.7 *T sei eine Theorie der Signatur Σ, $T^* = \{F^\forall / F \in T\}$, Σ sei die Signatur von T^*. Dann gilt:*

1. *T^* ist konservative Erweiterung von T.*

2. *Wenn B ein Modell von T^* ist, dann ist $B \restriction \Sigma$ (Σ-Redukt) ein Modell von T.*

3. *Wenn $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B}$ eine Expansion von $\mathfrak{A}$ zu einem Modell von $Sk(T, \Sigma_1)$ ist, dann ist $\mathfrak{B}$ auch ein Modell von T^*.*

zu $Sk(T,\Sigma_1)$*:* Sei F eine beliebige Formel, o. B. d. A. pränex. Eine Folge $F = F_0, F_1, \ldots, F_n = F^\forall$ sei wie folgt gestaltet: wenn $F_i = \forall\bar{x}\exists y\, G(\bar{x},y)$, so $F_{i+1} = \forall\bar{x}\, G(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

$$Sk(F_i) = \forall\bar{x}\exists y\, G(\bar{x},y) \to \forall x\, G(\bar{x}, f(\bar{x}))$$

$$Sk(F^\forall) = \{Sk(F_i) : i \leq n\}$$

$$Sk(T,\Sigma_1) = \bigcup\{Sk(F^\forall) : F \in T\}$$

Beweis: Sei $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{B}$ eine Expansion von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B} \models Sk(T,\Sigma_1)$.

Zu zeigen, $\mathfrak{B} \models T^*$: wenn $F \in T$, so existiert eine Folge $F_0 = F_1, F_2, \ldots, F^\forall$. Nach Konstruktion gilt: $\models F_{i+1} \to F_i$. Andererseits gilt: $Sk(T,\Sigma_1) \models F_i \to F_{i+1}$ $\curvearrowright$ $Sk(T,\Sigma_1) \models F_{i+1} \leftrightarrow F_i$ $\curvearrowright$ $Sk(T,\Sigma_1) \models F \leftrightarrow F^\forall$ $\curvearrowright$ $\mathfrak{B} \models F^\forall$ $\curvearrowright$ $\mathfrak{B} \models T^*$.□

5.3 Herbrand-Modelle

Sei $U(\Sigma)$ die Menge der variablenfreien Terme einer Signatur Σ, f sei ein Funktionssymbol aus $\mathbb{F}(\Sigma)$, $f^\delta : U(\Sigma)^{\mathrm{ar}(f)} \to U(\Sigma)$.

f^δ ist festgelegt durch $f^\delta(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)}) = f(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)})$, für R^δ gilt $R^\delta \subseteq U(\Sigma)^{\mathrm{ar}(R)}$.

Behauptung: Jedes Herbrand-Modell der Signatur Σ läßt sich als Teilmenge von $B(\Sigma)$ beschreiben. $B(\Sigma)$ heißt *Herbrand-Basis* und ist definiert durch

$$B(\Sigma) = \{R(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(R)}) \,/\, R \in \Sigma, t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(R)} \in U(\Sigma)\}$$

$U(\Sigma)$ wird Herbrand-Universum genannt. Es gilt:

$$(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(R)}) \in R^\delta \;\longleftrightarrow\; R(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(R)}) \in I, \qquad I \subseteq B(\Sigma)$$

Es gibt also eine eineindeutige Beziehung zwischen den Teilmengen von $B(\Sigma)$ und den Herbrand-Modellen von Σ.

Sei T eine universale Theorie. Als $\mathrm{HMod}(T)$ bezeichnen wir die Menge aller Herbrand-Modelle von T, $\mathrm{HMod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(T)$.

Das Herbrand-Schließen erklären wir wie folgt:

$$T \models_H F \iff \mathrm{HMod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$$

(Vergleiche mit gewöhnlichem Folgerungsbegriff $T \models F \iff \mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$).

Offenbar gilt es $T \models F \implies T \models_H F$.

Frage: Gilt ebenfalls $T \models_H F \implies T \models F$?

Diese Umkehrung gilt nicht. Um es zu zeigen, können wir eine Theorie angeben, in der die obige Beziehung nicht zutrifft: Sei $\Sigma = (0, f(x), P(x))$ eine Signatur, $T = \{\forall x\,(P(x) \to P(f(x))), P(0)\}$.

1. Zunächst untersuchen wir, ob $T \models_H \forall x\, P(x)$ gilt. Das ist der Fall, denn es ist $U(\Sigma) = \{0,\, f(0),\, f^2(0),\, \ldots,\, f^n(0),\, \ldots\}$ und somit $(U(\Sigma), f, P^\delta) \models T$.

2. $T \models \forall x\, P(x)$ nicht gilt. Wenn wir $U(\Sigma)$ aus (1) mit der Menge der natürlichen Zahlen identifizieren, können wir sie nun zu den "ganzen" Zahlen erweitern, wobei die Beziehung $P(x)$ für die hinzugefügten Elemente als falsch festgelegt wird.

Satz 5.8 *T sei eine universale Theorie und sei $\exists \bar{x}\, F(\bar{x})$ eine Existenzaussage. Dann gilt: $T \models \exists \bar{x}\, F(\bar{x})$ genau dann, wenn $T \models_H \exists \bar{x}\, F(\bar{x})$.*

Beweis:

1. trivial, denn $\mathrm{HMod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(T)$.

2. Sei $T \models_H \exists \bar{x}\, F(\bar{x})$. Angenommen, $T \not\models \exists \bar{x}\, F(\bar{x})$, dann existiert ein Modell $\mathfrak{A} \models T$, so daß $\mathfrak{A} \models \neg\exists \bar{x}\, F(\bar{x}) \curvearrowright \mathfrak{A} \models \forall \bar{x} \neg F(\bar{x}) \curvearrowright \mathfrak{A} \models T \cup \{\forall \bar{x} \neg F(\bar{x})\} \curvearrowright$ es existiert ein Herbrand-Modell $\mathfrak{A}_0 \models T \cup \{\forall \bar{x} \neg F(\bar{x})\} \curvearrowright$ Widerspruch.□

Satz 5.9 (Herbrandsches Theorem) *T sei eine universelle Theorie, $\exists \bar{x}\, F(\bar{x})$ eine existentielle Aussage. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *$T \models \exists \bar{x}\, F(\bar{x})$.*

2. *Es existieren Substitutionen der Variablen durch variablenfreie Terme σ_i:* $\mathrm{Var} \to U(\Sigma)$, *$i = 1, \ldots, n$, so daß $T \models \bigvee_{i \le n} F_{\sigma_i}$.*

   $\Big[$ *für $F(x_1, \ldots, x_m)$ ist $F_{\sigma_i} =_{df} F(\sigma_i(x_1), \ldots, \sigma_i(x_m))$* $\Big]$.

Bevor wir zum eigentlichen Beweis übergehen, wollen wir uns überlegen, worin dabei das Hauptproblem besteht. Eine naive Herangehensweise wäre z. B. die folgende: aus $T \models \exists F(x)$ bietet es sich zu schließen, daß es ein Element $t \in U(\Sigma)$ existieren sollte, so daß $T \models F(t)$ gilt. Aus $\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(\exists x\, F(x))$ folgt aber nur, daß es ein Element t geben muß, das von Modell zu Modell variieren kann.

Beweis:

(2) $\to$ (1)*:* "trivial" (nach Axiomen der Logik).

(1) $\to$ (2)*:* Sei $T \models \exists \bar{x}\, F(\bar{x})$. Wir beschränken uns auf den Fall $l(\bar{x}) = 1$.

$T \models \exists x\, F(x)$ gdw. $T \models_H \exists x\, F(x)$, d. h. für jedes Herbrand-Modell I existiert ein variablenfreier Term t_I, so daß $I \models F(t_I) \curvearrowright$

$$T \models_H \bigvee_{I \in \mathrm{HMod}(T)} F(t_I) \qquad (*)$$

Es genügt zu zeigen, es gibt eine endliche Teilmenge $\Omega \subseteq \mathrm{HMod}(T)$ mit $T \models_H \bigvee_{I \in \Omega} F(t_I)$. Angenommen, eine solche endliche Teilmenge existiere nicht. Dann gilt für alle endlichen Teilmengen $\Omega \subseteq \text{HMod}(T)$: $T \not\models \bigwedge_{I\in\Omega} F(t_I)$. (An dieser Stelle sind wir berechtigt, $\not\models$ statt $\not\models_H$ zu schreiben, da F quantorfrei ist.)

Es folgt also, es existiert ein Modell $J \models \bigvee_{I\in\Omega} \neg F(t_I)$ $\curvearrowright$ jede endliche Teilmenge von $\{\neg F(t_I) \ / \ I \in \text{HMod}(T)\}$ ist konsistent mit T. Nach dem Kompaktheitssatz existiert ein Modell $K \models T \cup \{\neg F(t_I) \ / \ I \in \text{HMod}(T)\}$ $\curvearrowright$ Widerspruch zu $(*)$.□

Bei dem Versuch, ein Entscheidungsverfahren anzugeben, das effektiv bestimmen kann, ob eine beliebige prädikatenlogische Formel G logisch gültig ist, hat HERBRAND folgende Vorgehensweise vorgeschlagen:

1. Schritt: Herstellen der Existenzform $F := G^{\exists}$, $F = \exists\bar{x}\, H(\bar{x})$.

2. Schritt: $\models F$ genau dann, wenn ein Termtupel $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n$ existiert, so daß $\models \bigvee_{i=1}^{n} H(t_i)$ (aussagenlogisches Problem).

Eine Lücke dabei: wenn $\not\models F$, so existiert i. a. keine Schranke für den Test der Terme.

5.4 Definite Programme

5.5 SLD-Ableitungen

5.6 Vollständigkeit

6 Formalisierte Theorien und Wissenssysteme

6.1 Allgemeines

Bei dem Aufbau einer Wissensbasis wird zunächst von einem Objektbereich OB ausgegangen. Ein *Objektbereich* ist ein System von Dingen, die Objekte der realen Welt, unserer Anschauung oder unseres Denkens sein können. Das Wissen über einen derartigen Objektbereich wird zunächst in einer natürlichen Sprache dargestellt. Typische Quellen des Wissens sind z. B. Beobachtungen, Expertenwissen usw.

Durch eine adäquate Auswahl und Spezifikation der Objekte, der Relationen und der Funktionen definieren wir dann ein abstraktes Modell $\mathfrak{A}$, welches eine bestimmte Sicht auf einen Objektbereich beschreibt. Die Definition dieses abstrakten Modells (auch *Modellspezifikation* genannt) erfolgt in der Mengentheorie mit Hilfe eines geeigneten logischen Kalküls. Diesen Schritt bezeichnet man als *Modellierung*. Die Beschreibung eines Objektbereichs durch eine Modellspezifikation stellt eine Vereinfachung dar, da es in vielen Fällen nicht möglich ist, ein solches Modell eindeutig festzulegen, d. h. man benötigt eine Klasse $\mathbb{K}$ von Σ-Strukturen.

Entsprechend der Modellspezifikation ist dann eine formale Darstellung (eine logische Sprache $L(\Sigma)$) für deren Komponenten zu wählen.

Zu beschreiben ist die folgende Menge $Th(\mathfrak{A})$, $Th(\mathbb{K}) = \{F/\mathbb{K} \models F\}$.

In der Regel ist das gesamte Wissen über einen Objektbereich nicht vorhanden, und man verfügt nur über ein *fragmentarisches Wissen*, was als ein eindliches Axiomensystem $Ax = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ aufgefaßt werden kann. Dabei soll gelten $\mathfrak{A} \models Ax$, $\mathbb{K} \models Ax$.

Mit einer Ableitungsrelation $\models$ heißt $(Ax, \models)$ eine *Wissensbasis*. Ein wichtiger Punkt bei der Konstruktion einer Wissensbasis ist, ob man damit jedes Problem F lösen kann, das im Rahmen von dem zu untersuchenden Wissensbereich repräsentierbar ist? Mit anderen Worten, man fragt nach der Vollständigkeit des durch $(Ax, \models)$ dargestellten Wissens.

$Th(\mathbb{K})$ repräsentiert das "maximale" Wissen. Es gilt $Ax \subseteq Th(\mathfrak{A})$. $Th(\mathfrak{A})$ wird durch Ax *axiomatisiert*, wenn $(Ax)^{\models} = Th(\mathfrak{A})$, d. h. das Fragment repräsentiert bereits das gesamte Wissen.

6.2 Metamathematische Eingeschaften von Wissenbasen

PROBLEM: Wie lassen sich Theorien (Wissensbasen) beschreiben?

1. semantische Spezifikation: $\mathbb{K}$ sei eine Klasse von Σ-Strukturen, $T =_{df} Th(\mathbb{K})$.
2. syntaktische Spezifikation: hierbei wird T durch eine Menge von Formeln beschrieben, die in einem bestimmten Bereich als wahr angesehen werden.

   Konstruiert man für T die Modellklasse $\mathrm{Mod}(T)$, so ergibt sich oft das Problem, daß die Klasse $\mathrm{Mod}(T)$ i. a. viel größer ist, als die Regelmenge T intensionsgemäß umfaßen sollte.

   (a) algorithmentheoretische Eigenschaften: Entscheidbarkeit der Beziehung $Ax \models F$ ist in der Regel nur partiell erfüllbar $\Longrightarrow$ Semientscheidbarkeit (rekursive Aufzählbarkeit).
   (b) syntaktische Eigenschaften: Maximalität, Vollständigkeit, Eliminationseigenschaft ($Ax \models F \leftrightarrow NF(F)$, $NF(F)$ ist die quantorfreie Form von F).
   (c) modelltheoretische Eigenschaften: Kategorizität, elementare Typen, spieltheoretische Methoden.

Def 6.1 *T sei eine Theorie,* $\mathrm{Mod}(T) \neq \emptyset$.

1. *T heißt* vollständig, *wenn für beliebige Aussagen $F \in L(T)$ gilt: $T \models F$ oder $T \models \neg F$.*
2. *T ist* axiomatisierbar, *wenn eine entscheidbare Menge X von Aussagen existiert, so daß $X^{\models} = T^{\models}$.*

Satz 6.1 *T sei vollständig und widerspruchsfrei. Dann gilt: T ist entscheidbar genau dann, wenn T axiomatisierbar ist.*

Entscheidbarkeit wird bezüglich "$T \models F$" betrachtet.

Satz 6.2 *T sei konsistent. Dann existiert eine vollständige konsistente Erweiterung $T^* \supseteq T$.*

6.3 Satz von Löwenhein-Skolem

ω sei die kleinste unendliche abzählbare Kardinalzahl, ZF sei die Menge der Axiome der Mengenlehre. ZF impliziert folgende Aussagen: $\exists x(x = \omega)$ (Unendlichkeitsaxiom), $\mathrm{card}(\mathrm{Pow}(\omega)) > \mathrm{card}(\omega) = \chi_0$. Bildet wir eine Potenzmenge von $\mathrm{Pow}(\omega)$, so erhält man wieder eine Menge größerer Mächtigkeit, usw. Es ergibt sich eine unendliche Folge $\chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots$. Zieht man das Obengenannte in Betracht, umso erstaunlicher ist die Behauptung des folgenden Satzes von Löwenheim-Skolem:

Es existiert ein Modell $\mathfrak{A}$ von ZF, so daß $\mathrm{card}(\mathfrak{A}) = \omega \left[\mathfrak{A} \models \mathrm{card}(\mathrm{Pow}(\omega)) > \omega\right]$.

Aus der Existenz eines solchen abzählbaren Modells folgt: jede Theorie, die ein Modell besitzt, besitzt bereits ein abzählbares Modell.

Für den Beweis dieses Satzen benötigen wir folgende Begriffe:

Def 6.2

1. *Zwei Σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind* elementar äquivalent*, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, wenn $Th(\mathfrak{A} = Th(\mathfrak{B})$.*

   $\left[Th(\mathfrak{A}) = \{F/\mathfrak{A} \models F\}\ \textit{ist die Menge der in } \mathfrak{A} \textit{ gültigen Formeln}\right]$

2. *$\mathfrak{A}$ ist* elementare Unterstruktur *von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \leq_{eq} \mathfrak{B}$, wenn $U(\mathfrak{A}) \subseteq U(\mathfrak{B})$ und für jede Aussage F der Signatur $\Sigma \cup \{c_a/a \in U(\mathfrak{A})\}$ gilt: $\mathfrak{A} \models F$ gdw. $\mathfrak{B} \models F$.*

   $\left[(\mathfrak{A}, (c_a)_{a \in U(\mathfrak{A})}) \equiv (\mathfrak{B}, (c_a)_{a \in U(\mathfrak{A})})\right]$

Beispiel: Seien $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ die rationalen bzw. die ganzen Zahlen Zahlen. Gilt $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{Z}, <)$?

Man betrachte die Formel $F = (\forall x \forall y)(x < y \to \exists z(x < z < y))$. Es folgt $(\mathbb{Q}, <) \models F$, $(\mathbb{Z}, <) \not\models F$, denn die lineare Ordnung $(\mathbb{Q}, <)$ ist im Unterschied zu $(\mathbb{Z}, <)$ dicht geordnet.

Satz 6.3 (Löwenheim-Skolem)

1. *(absteigende Richtung)*

   $\mathfrak{A}$ sei eine unendliche Σ-Struktur. Dann existiert für jede Kardinalzahl κ: $min(\omega, \mathrm{card}(Fm(\Sigma)) \leq \kappa < \mathrm{card}(\mathfrak{A})$ eine Σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $B \leq_{eq} \mathfrak{A}$ und $\mathrm{card}(\mathfrak{B}) = \kappa$.

2. *(aufsteigende Richtung)*

   Sei $\mathfrak{A}$ eine Σ-Struktur, $\mathrm{card}(\mathfrak{A}) \geq \omega$. Dann besitzt $\mathfrak{A}$ eine echte elementare Erweiterung $\mathfrak{B} \geq_{eq} \mathfrak{A}$ der Mächtigkeit κ:

   $\mathrm{card}(U(\mathfrak{B})) = \kappa$ *mit* $\kappa \geq \max(\mathrm{card}(\mathfrak{A}), \mathrm{card}(Fm(\Sigma))$.

Sei ZF Mengentheorie von Zermelo-Fränkel. Es gilt $ZF \vDash \text{card}(\text{Pow}(\omega)) > \omega$. Nach Satz 6.3, (1): besitzt ZF ein abzählbares Modell $\mathfrak{A} \vDash ZF$, $\text{card}(\mathfrak{A}) \geq \omega$, dann existiert $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$, $\text{card}(\mathfrak{B}) = \omega$, da $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \curvearrowright \mathfrak{B} \vDash ZF$, $\mathfrak{B} \vDash \text{card}(\text{Pow}(\omega)) > \omega$.

Das hat zur Folge, daß höhere Mächtigkeiten in der Informatik als "irrelevant" angesehen werden können.

Beweis: Bei dem Beweis beschränken wir uns nur auf die erste Behauptung, in der schon alle grundlegenden Gedanken dargelegt werden.

Sei $\text{card}(\mathfrak{A}) \geq \omega$, κ wie oben. Für jede Teilmenge $N \subseteq U(\mathfrak{A})$ und jede pränexe Aussage $F \in (\Sigma \cup \{c_a\}_{a \in N})$ wird eine neue Menge $f(F) \subseteq U(\mathfrak{A})$ definiert.

Wenn F quantorfrei ist, so $f(F) := \emptyset$, sonst $F := \exists x\, B(x, \bar{a})$, $\mathfrak{A} \vDash \exists x\, B(x, \bar{a})$; in diesem Fall sei $f(F) \subseteq \{b/\mathfrak{A} \vDash B(b, \bar{a})\} \neq \emptyset$, $\text{card}(f(F)) = 1$.

Wenn $\mathfrak{A} \vDash \neg\exists x\, B(x, \bar{a})$, dann $f(F) = \emptyset$. Nun sei $M_0 \subseteq U(\mathfrak{A})$ so definiert, daß $\text{card}(M_0) = \kappa$. Es wird eine Folge $M_0, M_1, \ldots, M_n$, $n \geq 0$ konstruiert, $M_{n+1} = \bigcup\{f(F)/F \in (\Sigma \cup \{c_a\}_{a \in M_n})\}$, $M^* = \bigcup_{n \in \omega} M_n$, $M_n \subseteq M_{n+1}$.

$\mathfrak{B}$ wird so definiert: $U(\mathfrak{B}) = M^* \subseteq U(\mathfrak{A})$, $R(\mathfrak{B}) = R(\mathfrak{A}) \restriction M^*$.

Behauptung: $\mathfrak{B} \leq_{eq} \mathfrak{A}$.

Sei $F = \exists x\, B(x, \bar{a})$ und es gelte $\mathfrak{B} \vDash \exists x\, B(x, \bar{a})$. Dann existiert ein $b \in M^*$, $\mathfrak{B} \vDash B(b, \bar{a})$ und nach Induktionssvoraussetzung $\mathfrak{A} \vDash B(b, \bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash B(b, \bar{a})$.

Umkehrung: sei $\mathfrak{A} \vDash \exists x\, B(x, \bar{a})$, $\bar{a} \subseteq M^*$, d. h. es existiert ein $j \in \omega$: $\bar{a} \subseteq M_j \curvearrowright$ nach Konstruktion $f(F) \in M_{j+1} \subseteq M^*$.

Sei $f(F) = \{b\}$, $\mathfrak{A} \vDash B(b, \bar{a})$; nach Induktionssvoraussetzung gilt: $\mathfrak{B} \vDash B(b, \bar{a}) \curvearrowright \mathfrak{B} \vDash \exists x\, B(x, \bar{a})$.