Übungen **Methoden und Prinzipien der Logik**
Wintersemester 2006-2007 zur Vorlesung von Prof. Dr. Heinrich Herre

Die Aufgabenstellungen und weitere aktuelle Informationen zu den Übungen finden Sie stets unter

Aufgabenblatt 1

1. Man zeige, dass die folgenden Formeln allgemeingueltig sind
   a) $\forall x\phi(x) \to \phi[x/t]$
   b) $\phi[x/t] \to \exists x\phi(x)$
   wobei t einen Term darstellt, dessen Variablen an der Stelle x in ϕ nicht gebunden sind. $\phi[x/t]$ ergibt sich aus $\phi(x)$, indem die Variable x an allen Stellen des Vorkommens durch t ersetzt wird. Man zeige ferner an einem Beispiel, dass die an t gesttellte Bedingung notwendig ist.

2. Man zeige, dass die folgenden Formeln nicht allgemeingueltig sind.
   a) $\phi[x/t] \to \forall x\phi(x)$
   b) $\exists x\phi \to \phi[x/t]$
   c) $(\exists x\phi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$.

3. Man zeige, dass die folgenden prädikatenlogischen Formeln Tautologien sind:
   a) $\exists x\forall y\phi(y, x) \to \forall x\exists y\phi(x, y)$
   b) $\forall x(\phi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\phi(x) \to \forall x\psi(x))$
   c) $\exists x(D(x) \to \forall y D(y))$ (Deppenformel).

4. Man zeige, dass die folgende Formel ϕ ein Modell besitzt, und dass jedes Modell von ϕ unendlich ist.
   $\phi = \forall x\neg R(x, x) \wedge \forall x\forall x\forall z[R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z)] \wedge \forall x\exists y R(x, y)$.

5. Man zeige, dass die folgenden Formeln in jedem normalen Modell gueltig sind:
   a) $\forall x\exists y(x = y)$
   b) $\phi[x/t] \leftrightarrow \forall x(x = t \to \phi(x))$
   c) $\phi[x/t] \leftrightarrow \exists x(x = t \wedge \phi(x))$,
   wobei keine der in t vorkommenden Variablen in ϕ gebunden ist und $x \notin Var(t)$. Eine Struktur $\mathcal{A} = (U, F, R)$ heisst normal, wenn das Gleichheitszeichen "=" durch die Relation $\{(a, a)|a \in U\}$ interpretiert wird.

6. S sei eine Menge von Formeln und ϕ eine Aussage. Man zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:
   a) $S \not\models \phi$ und $S \not\models \neg\phi$
   b) es exixtieren Modell $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von S, so dass $\mathcal{A} \models \phi$ und $\mathcal{B} \models \neg\phi$.
   Falls a) oder b) erfuellt sind, so heisst ϕ unabhaengig von S.

7. Sei $X \cup \{\neg\beta \mid \beta \in Y\}$ inkonsistent (äquivalente Bedingung ist, dass diese Menge kein Modell besitzt). Man zeige, es gibt $\beta_1, \dots \beta_n \in Y$ mit $X \models \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$.

8. $(*)$ Sei T die folgende Theorie der Signatur $\Sigma = (s(x), P(x), 0)$, $s(x)$ ist einstelliges Funktionssymbol, $P(x)$ einstelliges Relationssymbol. T = $\{ \neg\exists x(s(x) = 0), \neg\exists xy(x \neq y \wedge s(x) = s(y)\}$ $\cup \{\phi_n \mid n < \omega\}$, wo ϕ_n die Aussage "Es gibt keinen Zyklus der Laenge n" bedeute. Dann gibt es eine ein-eindeutige Funktion zwischen der Menge aller vollsaendigen Erweiterungen von T und der Menge der reellen Zahlen.

Aufgaben fuer die Master-Studenten und Bachelor-Studenten zur Abgabe. Fuer die uebrigen Studenten zum Selbststudium ohne Abgabe und ohne Korrektur